

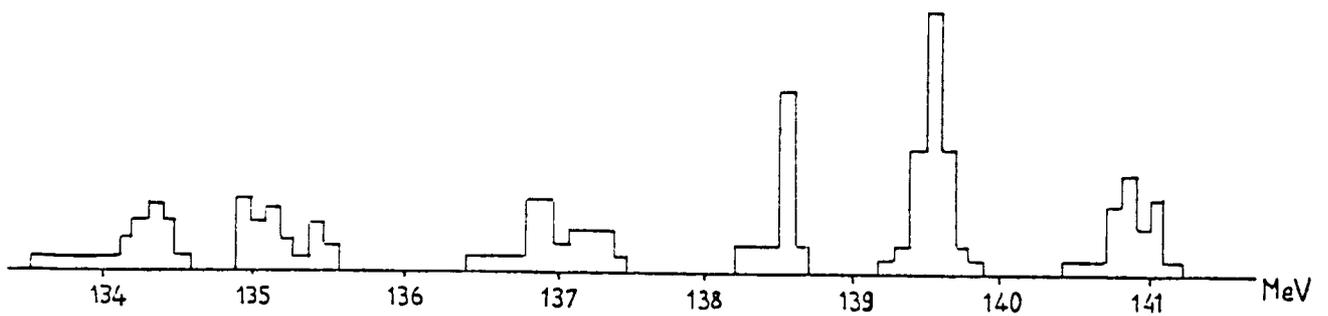
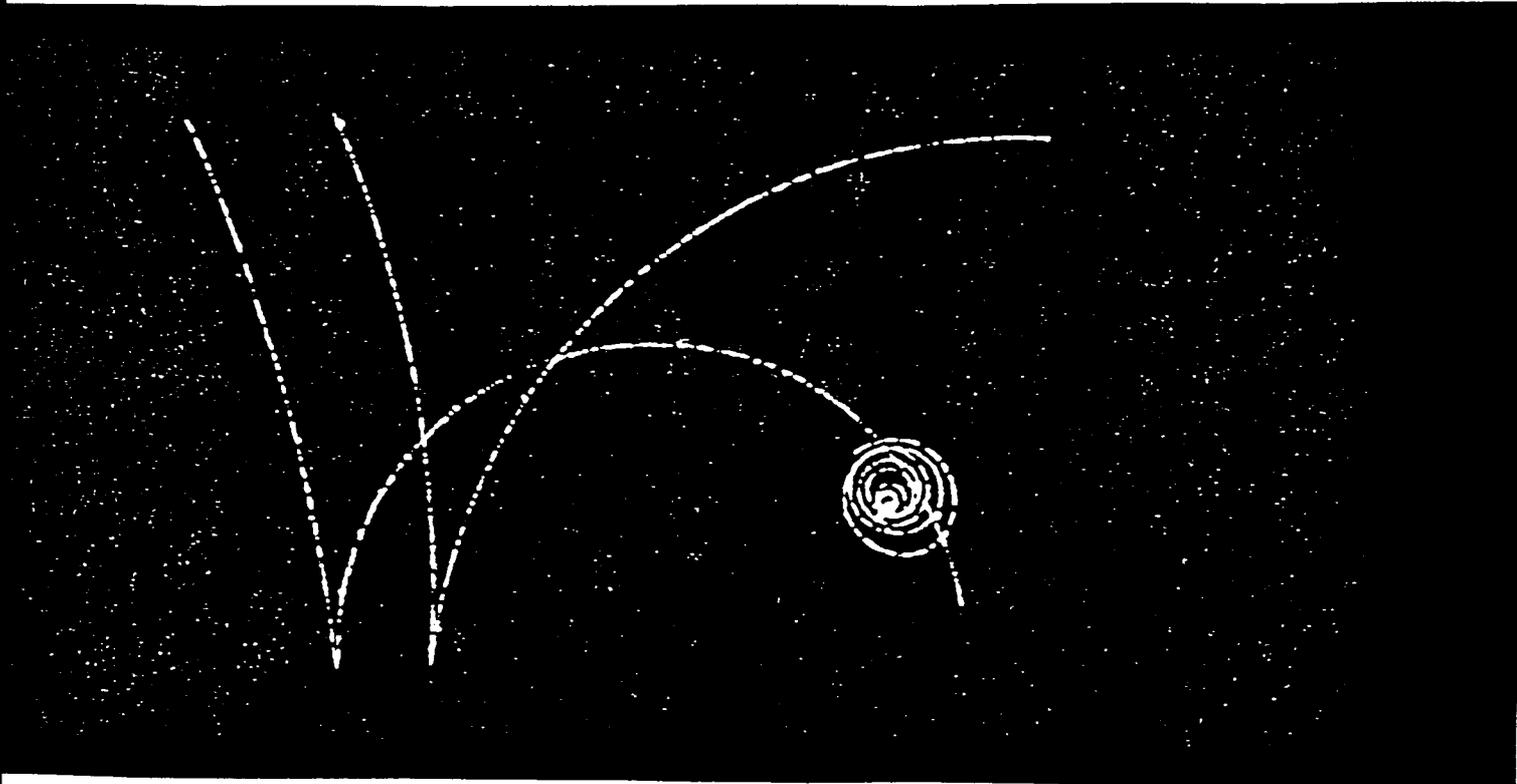
SEMINAIRE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

A. Lichnerowicz.

Mardi 31 janvier 1984 - 10h.30 - Salle 5 - Collège de France

Joël STERNHEIMER

" Musique des particules élémentaires "



La solution d'un difficile problème de microphysique, le problème des masses des particules élémentaires (protons, électrons, pions, kaons, hypérons, mésons lourds...) a mis en évidence un résultat surprenant: les particules possèdent des propriétés musicales. Ainsi leurs masses suivent la gamme chromatique tempérée, subdivisée (en incluant les particules instables) en microintervalles, et réalisant alors, comme on peut le vérifier, une synthèse des gammes orientales et occidentales; elles forment entre elles des accords dont la consonance est liée à leur stabilité, elles sont globalement réparties comme les notes d'une symphonie, et les ondes associées sont modulées par la présence d'ondes voisines comme cela existe dans les musiques orientales.

Une première conséquence est la confirmation d'une hypothèse de Louis de Broglie (dans le cadre d'une tentative d'interprétation causale de la mécanique quantique), et qui associe à toute particule une vibration de fréquence proportionnelle à sa masse; de plus les propriétés de cette vibration sont précisées, et la possibilité de la moduler a des conséquences pratiques intéressantes, notamment pour la fusion nucléaire.

Une autre conséquence, dans un tout autre domaine d'application, est la mise en évidence de lois musicales de caractère général: la modulation de l'enveloppe spectrale (et ainsi du timbre) de sons musicaux conformément à ces lois peut être intégrée sous forme de modules programmés dans un synthétiseur de musique; enfin, des instruments peuvent être construits qui permettent de modéliser acoustiquement les vibrations des particules, présentant un intérêt pédagogique (et artistique) évident.

Références: J. Sternheimer, "Musique des particules élémentaires", Comptes rendus de l'Académie des Sciences 297, 829 (1983); demande de Brevet français n° 83-02122.

MUSIQUE DES PARTICULES ELEMENTAIRES : INVARIANCE D'ECHELLE, QUANTIFICATION

ET LOIS MUSICALES DANS LA MATIERE. Exposé par Joël Sternheimer au Collège de France, séminaire de Physique mathématique (A. Lichnerowicz), le 31/1/1984.

---

A.Lichnerowicz : Je vous présente Joël Sternheimer qui a une nouvelle fort originale concernant les particules élémentaires, et je lui donne tout de suite la parole.

J.Sternheimer : Comme vous le savez sans doute, ou en tout cas comme au moins un certain nombre d'entre vous le savent, aujourd'hui est un anniversaire. Il y a en effet juste vingt ans, jour pour jour, le 31 Janvier 1964, était découverte dans le laboratoire de Brookhaven près de New-York, cette photo d'une particule produite par le synchrotron à protons, et qui est probablement la plus fameuse photo de particule existante (fig.1) : c'était le premier exemple produit par une machine de la particule  $\Omega^-$ , qui avait été observée juste une fois dix ans avant dans les rayons cosmiques. Comme je vois que dans la nombreuse assistance il y a même des lycéens, je vais essayer d'expliquer rapidement ce qu'est une particule, ce qu'est une photo comme celle-là, et comment on l'analyse. C'est une photo de chambre à bulles : lorsque des particules électrisées passent dans une chambre contenant de l'hydrogène liquide qui est à une température légèrement au-dessus de sa température d'ébullition, elles laissent une trace parce que ça déclenche très localement une ébullition, ce qui permet de repérer leur passage. Il y a un champ magnétique qui courbe leurs trajectoires, et ce d'autant plus qu'elles sont plus légères, parce que la courbure est proportionnelle à la charge et inversement proportionnelle à la masse et à la vitesse de la particule. Et là, on voit effectivement un kaon qui rencontre un proton de l'hydrogène liquide de la chambre à bulles et qui crée un  $\Omega^-$  et plein d'autres particules.

Eh bien, si à ce moment-là quelqu'un avait eu l'idée, en mesurant les masses des particules telles qu'on peut les déduire précisément de la courbure de ces trajectoires, de traduire en fréquences musicales les masses des particules présentes dans cette réaction, voilà ce que cela aurait donné :



(fréquences modulo un nombre entier d'octaves)

On entend un kaon (1) qui heurte un proton (2) et qui donne toute une gerbe de particules (3).

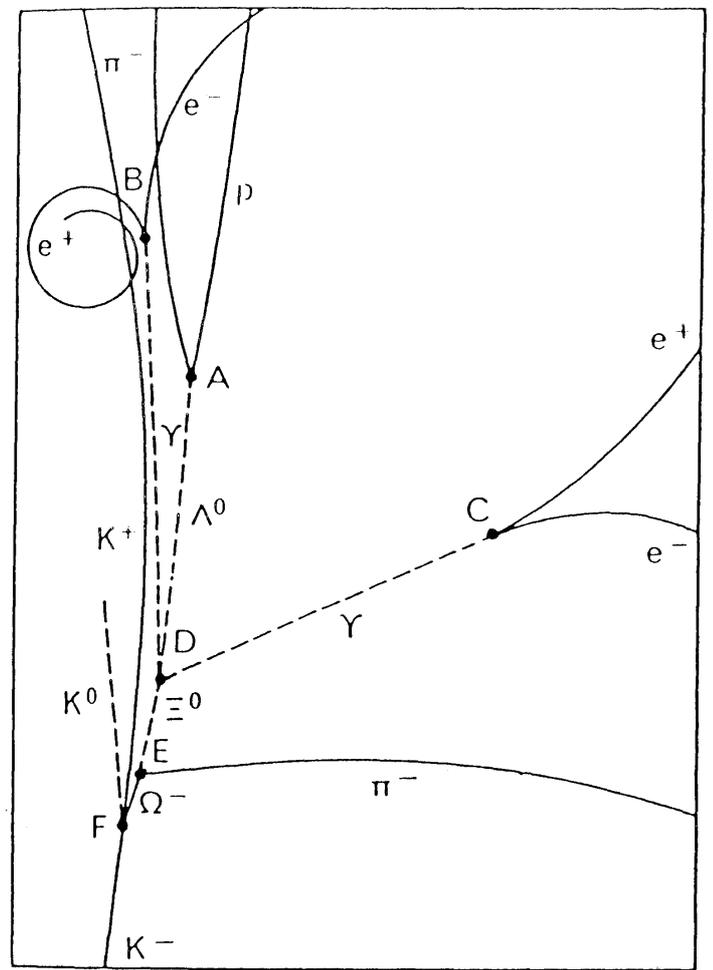
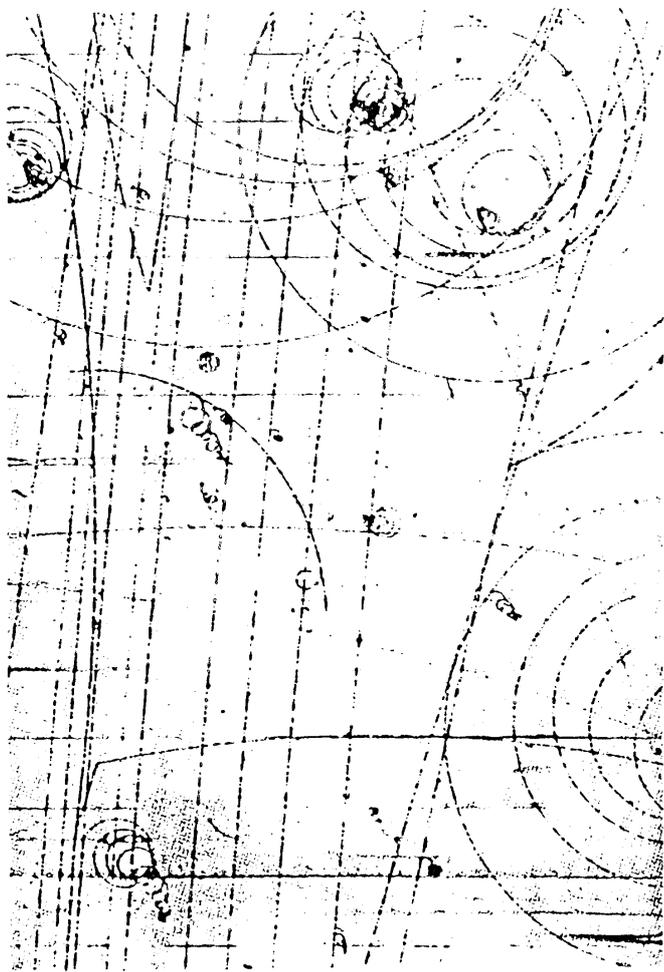


Figure 1

This bubble chamber picture shows the first example of the production and decay of an  $\Omega^-$  particle<sup>1</sup>. The drawing shows the chain of events that can be reconstructed by accurately measuring the tracks seen in the picture.

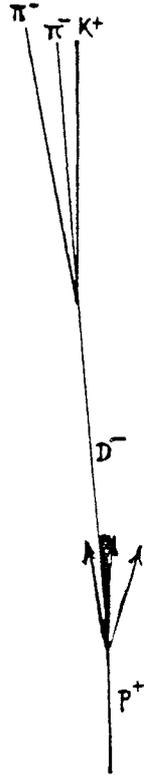
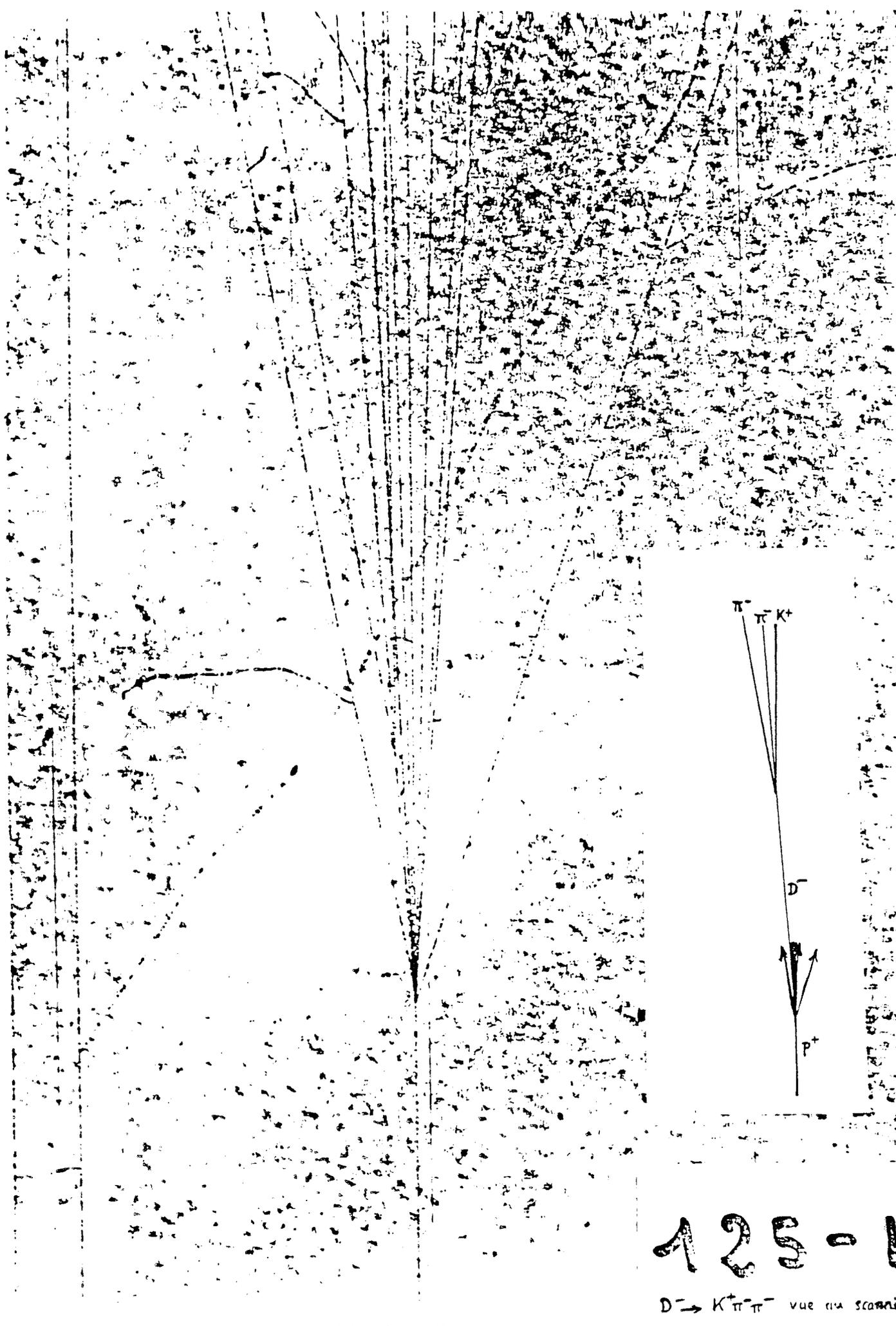
Effectivement, vous avez bien entendu, toute la gerbe de particules c'était un très bel accord, un la mineur qui se complète en 6è et même en 7è : cette figure n'est pas seulement belle à voir, mais même à écouter.

Alors, qu'est-ce que cela veut dire : et d'abord cet exemple n'est-il pas isolé ? Eh bien, je vais vous en donner d'autres. En voici un beaucoup plus simple, désintégration d'un kaon en pions dont l'un donne naissance à deux paires d'électrons-positrons après s'être désintégré en photons, joué par un ami musicien, Philippe Fléjo, avec un instrument que nous avons fait construire spécialement : on entend un kaon incident, puis la réaction, et puis si on entend bien, la dissonance d'un quart de ton s'en va notamment avec la création de paires de particule-antiparticule, et on entend aussi à peu près des octaves successives. Voici encore (fig.2) une photo très récente qui m'a été aimablement communiquée par le laboratoire de Jussieu de physique nucléaire et hautes énergies ; c'est un exemple de charme provenant d'un proton incident : un méson  $D^-$  qui se désintègre en  $K^+ \pi^- \pi^-$ . Vous voyez d'ailleurs (l'évolution des techniques d'expérimentation) entre 1964 et maintenant, à gauche une particule de  $10^{-10}$  sec. de durée de vie ne laissant qu'une trace de quelques centimètres, et à droite la trace laissée par une particule qui vit  $10^{-12}$  sec. Alors voilà ce que donnent toutes ces particules.



- (A)  $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0, \pi^0 \rightarrow 2\gamma \rightarrow 2e^+e^-$
- (B)  $K^+ p \rightarrow \Omega^- K^+ K^0, \Omega^- \rightarrow \Xi \pi, \Xi \rightarrow \Lambda \pi, \pi \rightarrow \mu \nu, \mu \rightarrow e \nu \nu$
- (C)  $p p \rightarrow D^- + \text{hadrons}, D^- \rightarrow K^+ \pi^- \pi^-, \pi^- \rightarrow \mu \nu$

Il me faut préciser que toutes ces musiques que je vous ai fait entendre sont des transpositions, de 68 octaves (environ), des fréquences propres des particules élémentaires (proportionnelles à leur masse propre, ainsi que nous allons le préciser) en fréquences musicales. C'est modulo 68 que "sous les particules, la musique" si je puis me permettre. Bien. Alors qu'est-ce que cela veut dire, qu'est-ce que les particules, qu'est-ce que la musique, et qu'est-ce que cela peut nous apprendre sur la structure de la matière ? Eh bien, je commencerai peut-être par parler du problème des masses de particules. C'est un problème qui est posé pratiquement depuis l'origine, depuis qu'on trouve des particules. Dans une liste des problèmes-clés de la physique, il y a dix ans, le physicien russe Ginzburg (3) donnait comme principal problème à résoudre en microphysique, le problème des masses des particules. Il y a quelques années, dans une interview, le physicien américain Feynman (4) disait aussi que le principal "fil à tirer" en physique, c'était les masses des particules : il y a des théories, précisait-il, qui donnent d'assez bonnes descriptions pour les interactions, mais non pour les masses correspondantes ; et vous l'avez peut-être vu, c'est encore un anniversaire, il y a un an exactement paraissait dans Physical Review Letters (du 31 Janvier 1983) un article (par deux physiciens européens, Hasenfratz et Montvay (5) qui montrait que les tentatives de la chromodynamique quantique de retrouver les masses des particules, dans un modèle



125-1

$D^- \rightarrow K^+ \pi^- \pi^-$  vue en scanning (2)

FIG. 2:



sur réseau, ne pouvaient vraiment pas les donner. Il y a des modèles qui ont été faits de particules considérées comme composées de sous-particules, des modèles de quarks, mais alors que dans le cas des atomes considérés comme composites on a des lois simples pour les masses, parce que les noyaux d'atomes sont des nombres entiers de protons et de neutrons d'où une loi de nombres entiers successifs pour leurs masses, on n'a rien de tel pour les particules, chez qui ça a l'air effectivement très compliqué ; les valeurs approchées que donnent les modèles de quarks sont effectivement très approximatives, et marchent mieux pour les états résonants ou excités que pour les états de base, pour lesquels c'est vraiment très loin.

D'un autre côté vous savez que la physique, la physique mathématique précisément, est issue de la musique : on raconte que Pythagore, se promenant, a entendu un forgeron qui tapait sur des barres, et a remarqué qu'à des rapports musicaux tels qu'une quinte correspondaient des rapports simples de longueurs (6) , et en fait c'est de cette constatation qu'est née la physique mathématique classique. On peut remarquer aussi que la physique mathématique quantique est née de l'analyse harmonique, c'est-à-dire de la constatation qui a été faite, et a même donné naissance à une autre forme de musique à la Renaissance, qu'un son musical était une vibration périodique qui se décomposait en harmoniques : on remplace des nombres par des opérateurs avec des valeurs propres. Et depuis, en musique, pendant très longtemps, il y a eu un dilemme entre la gamme grecque qui convenait bien à la mélodie mais mal à l'harmonie et la gamme de la Renaissance qui convenait bien à l'harmonie mais, de nouveau, mal à la mélodie : et vous savez que ça a été résolu par l'apparition au 18<sup>e</sup> siècle essentiellement, à la fin du 17<sup>e</sup> siècle (7), de la gamme chromatique tempérée qui est transposable, ce que n'étaient pas les autres --c'est-à-dire que l'on peut jouer dans un ton ou dans un autre-- et qui approche bien à la fois l'harmonie et la mélodie, et a permis le développement qui s'en est ensuivi de la musique symphonique. On pouvait s'attendre que la physique suive : eh bien, en deux mots, c'est bien ce qui se passe : la gamme chromatique tempérée est le principe organisateur central dans les masses des particules.

Voici (tableau I) des lois, qui sont au départ des constatations empiriques, du spectre de masse des particules. Première loi : les masses des particules sont entre elles comme des notes de musique de la gamme chromatique tempérée, soit  $m = m_0 \times 2^{n/12}$ . La gamme chromatique tempérée est ce qui divise l'octave, rapport entre une fréquence et le double de cette fréquence, en 12 parties égales : ce qui fait des puissances entières de  $2^{1/12}$  (n est entier). Deuxième loi : toutes

les notes de la gamme, c'est-à-dire toutes les valeurs de  $n$ , ne sont pas représentées --c'est pour ça que ça avait l'air au départ très irrégulier-- mais les particules forment entre elles des accords, dont la consonance est reliée à leur stabilité. C'est ce qu'on a en musique lorsqu'on utilise des gammes diatoniques par exemple. Et troisième loi : à un niveau plus fin, en incluant les particules instables --expérimentalement, les premières sont celles qui sont plus stables que  $10^{-12,5}$  sec.--, la gamme tempérée est subdivisée en une gamme divisant le demi-ton tempéré en six microintervalles légèrement inégaux. Ce terme de "microintervalles" a été introduit en musique par Edith Gerson-Kiwi (8) à propos de la musique de la Bible. Et cette gamme, c'est ce que l'on vérifie, effectue une synthèse des gammes musicales qui sont utilisées en occident et en orient. Je vous montre tout de suite --j'y reviendrai ultérieurement-- à quoi ressemblent les masses des particules modulo  $2^{1/12}$  (fig.3) : comme vous le voyez, on obtient une division en intervalles pas tout-à-fait égaux, et toutes les particules stables sont dans une même zone.

Alors, qu'est-ce que cela veut dire ? C'est une constatation au départ empirique, mais surprenante, disons, par rapport à l'image que l'on a de la matière. Et puis, il y a deux choses que cela éveille immédiatement: d'une part, une notion d'invariance d'échelle, parce que c'est une propriété de la gamme tempérée que d'être transposable, qu'il y ait un rapport constant entre une note et la suivante ; et d'autre part, cela évoque une hypothèse qui avait été émise en 1923 par Louis de Broglie (9), selon laquelle à une particule doit être associée une fréquence de vibration précisément, proportionnelle à sa masse.

L'hypothèse d'invariance d'échelle a été introduite en physique par Hermann Weyl (10) en 1918 : son idée était de réunir dans une même théorie l'électromagnétisme et la gravitation, et il a considéré pour cela une symétrie plus générale que celle du groupe de Lorentz inhomogène, c'est-à-dire le groupe d'espace-temps, en introduisant ce qu'il appelait "eichinvarianz" qui a été reprise récemment sous une forme modifiée --l'invariance de jauge-- comme une jauge imaginaire : mais lui l'introduisait comme jauge réelle, c'est-à-dire ce qui correspond aux "dilatations" ou multiplications par un scalaire, en d'autres termes une symétrie telle que les lois de l'univers sont invariantes quelle que soit l'échelle à laquelle on les observe. Non seulement dans l'espace et dans le temps, mais dans l'échelle.

Il a été tout de suite "contré" par Einstein (11), qui lui disait que si c'était vrai on devrait observer "des électrons de toutes les grandeurs" par exemple : on n'observerait pas de raies spectrales bien définies mais un flou, etc...

En 1923, de Broglie, lui, était parti d'une autre idée : il avait rapproché l'équation  $E = h\nu$  qu'Einstein avait considérée dans son article sur l'effet photoélectrique, associant une fréquence à une énergie, et l'équation déduite

de la relativité restreinte,  $E = mc^2$ , c'est-à-dire qu'à une certaine énergie est associée une masse ; écrivant  $h\nu = mc^2$ , de Broglie disait "eh bien, il faut associer à une masse une certaine fréquence de vibration". Se demandant "que va-t-il se passer lors d'une transformation de Lorentz?" eh bien, la masse va varier,  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$  et puis, s'est-il dit, la fréquence c'est une horloge, et la dilatation des temps  $t = t_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$  va entraîner  $\nu = \nu_0 \times \sqrt{1-v^2/c^2}$ , soit une variation en sens inverse. En fait le calcul correct, qu'il a d'ailleurs aussi donné par la suite (12), donne  $t = (t_0 - vx/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , introduisant une "vitesse de phase"  $c^2/v$  pour les ondes qu'il considérait, associées aux particules ; de cette vitesse de phase et de  $h\nu = mc^2$  on déduit  $\lambda = h/mv$ , qui est (avec  $E = h\nu$ ) une des deux formules qui ont donné naissance à la mécanique quantique. Et que l'on a donc gardé par la suite, tandis que de  $\nu = mc^2/h$  on ne parle pas beaucoup...en fait dans l'interprétation de Copenhague qui a prévalu (Bohr qui a à son tour "contré" de Broglie) on considère que ce n'était pas vraiment une vibration mais une "onde de probabilité de présence" --la norme à l'unité de la fonction d'onde, par exemple, lui ôte la propriété d'additivité parce que ça doit alors "marcher" quadratiquement. Et là-dessus Bohr et Einstein, (qui avaient "contré" de Broglie et Weyl), se sont disputés pendant pas mal de temps...

Le point de vue que je vais essayer de soutenir est que, si les deux hypothèses (de de Broglie et de Weyl) isolément ne marchaient pas, en les associant d'une certaine façon elles fonctionnent bien. (...). J'ai plus haut qualifié de "surréaliste" le raisonnement de de Broglie (qui n'a cessé de soutenir, par la suite, cette notion de deux ondes se transformant en sens inverse, mais demeurant en phase) parce que, si le problème ne se pose pas pour une transformation de Lorentz, il se pose effectivement lorsqu'on change d'échelle d'observation.

Il y a en effet une image de la matière qui est très répandue, et selon laquelle la matière serait formée de particules elles-mêmes formées de sous-particules, et ainsi de suite. Il faut noter que cette image est très préoccupante philosophiquement, parce que si c'était vrai qu'on ne soit que des assemblages de particules, et qu'en définitive tout ce qui se passe dans l'univers se réduise aux lois qui guident les particules, eh bien, il n'y aurait plus de responsabilité humaine, par exemple ; car tout se déduirait de ce qui se passe au niveau le plus élémentaire. Et le fait qu'il y ait une responsabilité humaine, par exemple, cela dit bien que d'une certaine façon en tout cas on peut lire l'Univers aux différentes échelles, et donc qu'il y a, expérimentalement, une certaine invariance d'échelle dans l'Univers. Or, dans la décomposition d'une particule en sous-particules, c'est une particule lourde qui en principe se décompose en sous-particules plus légères ; au contraire, d'un point de vue vibratoire, si on considère la

décomposition d'une vibration périodique en ses harmoniques, eh bien, c'est une vibration de fréquence grave qui contient des harmoniques plus aigus ; c'est-à-dire que cela va en sens inverse, dans la mesure où la fréquence de vibration est proportionnelle à la masse de la particule : "l'aristocratie des ondes" va en sens inverse de l'"aristocratie de la matière". Et en fait, cela rétablit un équilibre et amène à considérer ainsi une certaine invariance d'échelle.

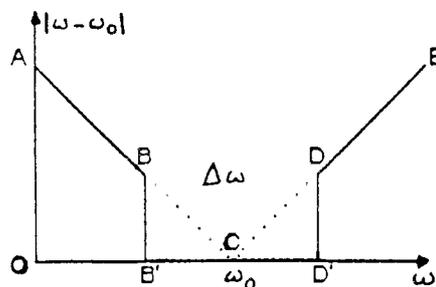
Alors si effectivement on associe, comme le voulait de Broglie, à une particule une vibration, mais contenant des harmoniques, eh bien, à ce moment-là des problèmes d'accord vont se poser entre les différentes particules ; c'est-à-dire qu'il va y avoir des interférences destructrices, qui vont créer des phénomènes déstabilisateurs entre des particules si leurs fréquences ne sont pas en accord ; ce qui fait que l'on va avoir entre les masses des particules des relations du type :

$$pm_a = qm_b$$

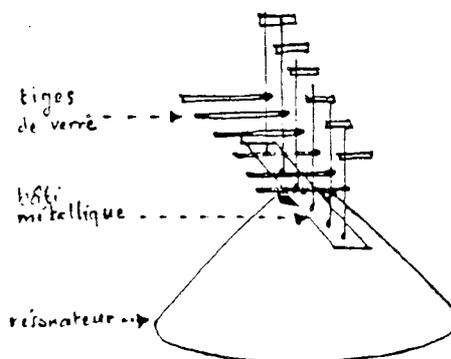
c'est-à-dire un nombre entier qui multiplie la masse d'une particule égale un nombre entier qui multiplie la masse d'une autre particule, correspondant à des coïncidences d'harmoniques. Donc, d'une part on va avoir cela, soit  $m_b/m_a = p/q$  ; d'autre part, à cause de l'invariance d'échelle, on va vouloir que le rapport d'une masse à la suivante soit constant (ne dépende pas de la valeur de cette masse), ce qui va nécessiter un spectre de masse exponentiel, du type  $m = m_0 e^{\alpha n}$ . En conséquence, les particules vont être déterminées par les solutions d'une équation du type :

$$e^{\alpha n} \simeq p/q$$

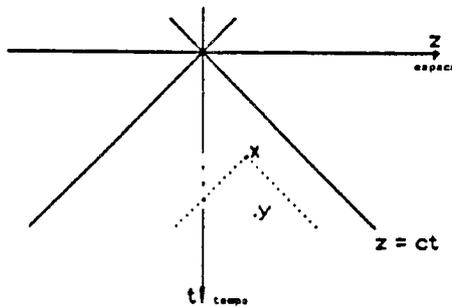
où le signe  $\simeq$  (à peu près égal) veut dire que bien sûr comme en général  $e^{\alpha n}$  est irrationnel et  $p/q$  rationnel ça ne peut pas être égal, mais qu'il va y avoir un phénomène de synchronisation qui va amener les valeurs réelles des masses soit sur l'exponentielle, soit sur le spectre linéaire. Qu'est-ce que ce phénomène de synchronisation ? C'est une notion qui a été introduite il y a bien longtemps par Huyghens qui avait remarqué que deux horloges légèrement dérégées placées sur une paroi mince se synchronisaient ensemble : Lord Rayleigh (13) a fait une observation similaire sur les tuyaux d'orgue, à savoir qu'on n'arrivait pas à les accorder sur deux fréquences séparées par un trop petit écart, et a esquissé une théorie. Ce dessin vous explique ce qui se passe : lorsqu'on a un



oscillateur de fréquence autonome  $\omega_0$ , couplé à un autre oscillateur dont on fait varier la fréquence, eh bien on constate (par exemple pour un oscillateur électrique) qu'à une certaine valeur, l'écart entre les deux fréquences tombe exactement à 0 et les deux fréquences se synchronisent exactement. Ca correspond à un couplage non linéaire entre les vibrations ; c'est une propriété des vibrations non linéaires. La théorie générale en a été faite par Jules Haag (14) en 1950, pas complètement tout au moins, c'est un ingénieur de chez Philips (15) qui en a déduit la formule intéressante, la condition de synchronisation : à savoir que l'écart relatif de fréquence  $\delta\omega/\omega$  soit plus petit que la moitié du rapport des amplitudes de l'oscillateur extérieur sur l'autonome. (Les références se trouvent dans Minorsky (16) ou Blaquière (17)). Il y a longtemps que ce phénomène de synchronisation a été suspecté de jouer un rôle dans les particules : il y a une vingtaine d'années, un ingénieur qui s'appelait Lamouche (18) avait remarqué que la question, souvent posée, de savoir pourquoi tous les électrons ont la même masse, de même que tous les protons, lui paraissait indiquer manifestement un phénomène de synchronisation. Voici un exemple acoustique du phénomène : il s'agit d'un appareil (19) construit depuis une trentaine d'années juste en face du Collège de France par les frères Baschet, et qui est constitué par des tiges de verre reliées à un bâti métallique, lui-même relié à un résonateur. On constate --ce qui est d'ailleurs perçu comme une difficulté par ceux qui construisent cet appareil-- que l'on n'arrive pas à accorder ces tiges plus finement que la gamme tempérée, car sinon se produit ce phénomène de synchronisation ; à moins que l'on ne sépare les résonateurs : et par exemple ici où vous avez deux résonateurs, il y a une séparation assez nette entre les ondes qui vont vers l'un et celles qui vont vers l'autre, et alors que pour chacun de ces deux résonateurs on ne peut pas faire plus fin que la gamme tempérée, eh bien entre les tiges qui sont reliées à l'un et celles qui sont reliées à l'autre on peut faire un écart beaucoup plus fin. Ce qui illustre bien le lien qu'il y a entre la causalité, qui entraîne comme vous le savez (20) la non-séparabilité-- parce que si tout a un sens, rien n'est insignifiant, et on ne peut rien isoler dans l'univers-- et un spectre de masse discret, et même précisément un spectre de masse exponentiel : puisque dans le cas d'un seul résonateur on ne peut accorder les tiges plus finement qu'une gamme exponentielle, plus finement que la gamme tempérée : vous avez vu en effet que la condition de synchronisation était qu'un  $\delta\omega/\omega$ , c'est-à-dire une fréquence relative, soit inférieure à une certaine valeur, ce qui donne bien un spectre exponentiel.



Maintenant que nous avons un peu posé les bases, je vais être un peu plus technique, je m'en excuse pour les uns et au contraire pour les autres ce sont les précisions qu'ils demandent certainement. Si donc on considère le groupe d'invariance de l'ordre causal --je précise ici que c'est Zeeman (21) qui a introduit de cette façon le groupe de Weyl, c'est-à-dire la symétrie introduite par Weyl en 1918 : il a considéré un ordre dans l'espace-temps tel que  $x < y$  si  $y$  peut être un évènement qui succède causalement à  $x$ , c'est-à-dire si  $y$  est dans le cône de lumière qui a son sommet en  $x$ , ou encore si  $y - x$  est un vecteur de genre temps. Vous savez en effet que pour que la lumière partant d'un point  $x$  à l'instant  $t$  puisse arriver en un point  $y$  à l'instant  $t'$ , il faut que  $y$  soit dans le cône de lumière de  $x$ , sinon la lumière n'a pas le temps de l'atteindre :



c'est donc comme cela que Zeeman a défini l'ordre causal, et en regardant quel était le groupe d'invariance qui préservait cet ordre, il a trouvé que c'était le groupe de Lorenz inhomogène, c'est-à-dire multiplié par les translations de l'espace-temps, multiplié lui-même par les dilatations c'est-à-dire l'invariance d'échelle. --Si donc on considère ce groupe, comment obtenir un spectre de masse ? Vous savez que dans le groupe de Poincaré (groupe de Lorenz inhomogène), on associe une représentation de l'algèbre de Lie de ce groupe avec deux nombres quantiques qui caractérisent les particules, la masse et le spin. Et lorsque la particule  $Q$  a été découverte en 1964, elle venait confirmer des relations semi-phénoménologiques (22) entre les masses des particules : il y avait des régularités qui apparaissaient, qui ont stimulé un intérêt assez fort pour la question d'arriver à déduire rigoureusement une formule de masse. Beaucoup d'articles ont paru là-dessus, beaucoup de gens ont essayé, et bien vite des théorèmes d'impossibilité sont apparus, de marier les symétries externes du type Poincaré, c'est-à-dire Lorenz inhomogène, reliées à la masse, avec les symétries internes du type de celles qui venaient d'être introduites pour les particules, le groupe  $SU(3)$  notamment (23). Et c'est Flato et mon frère Daniel (24) qui ont trouvé que ces théorèmes d'impossibilité ne s'appliquaient pas pour une catégorie de représentations, les représentations locales d'algèbres de Lie, c'est-à-dire où on prend les opérateurs non pas de  $-\infty$  à  $+\infty$ , mais en coupant une partie de l'intervalle, et à ce moment-là on pouvait bien obtenir un spectre discret pour ces opérateurs. Mais, quant à savoir quelle était la bonne représentation, le problème restait posé.

Eh bien, la représentation (25) si l'on veut la plus simple possible de l'algèbre de Lie  $W$  du groupe de Weyl, en prenant (cf; tableau III) les six générateurs  $M_{\mu\nu}$  de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, l'opérateur des dilatations, et les quatre opérateurs des translations écrits sous la forme

$$P_{\mu}^{\circ} = P_{\mu} e^{-i\partial_q}$$

où  $\partial_q$  est canoniquement conjugué à l'opérateur d'échelle  $q$  --le crochet par l'opérateur d'échelle, cela revient à peu près à différentier, et comme on a un terme exponentiel, on a  $[P_{\mu}^{\circ}, iq] = P_{\mu}^{\circ}$ , c'est si vous voulez la dérivée de l'exponentielle --donne naturellement sur  $\mathcal{L}^2(0, 2\pi/\alpha)$  un spectre de masse exponentiel  $m = m_0 e^{\alpha n}$ . (Découlant donc de la symétrie exacte de  $W$ ).

Alors maintenant, comment à partir de ça obtenir le spectre de masse linéaire ? C'est un problème qui m'a préoccupé un certain temps parce que ce n'était pas évident a priori, il peut y avoir des quantités de groupes qui donnent un spectre de masse linéaire. Ce qui m'a guidé, c'est la manière dont les luthiers iraniens (26) accordent leurs instruments. En effet, vous savez que de nombreux instruments antiques s'accordaient selon des gammes incluant des rapports simples, alors que les instruments modernes comme les guitares sont accordés en gamme tempérée, avec des barrettes régulièrement espacées de façon décroissante exponentielle sur le manche ; il se trouve que ces iraniens avaient une autre manière d'accorder leurs instruments: ils prenaient le milieu sur l'instrument pour obtenir un intervalle : le milieu de l'octave pour obtenir non plus la quinte mais la quarte, le milieu de la quarte pour obtenir une tierce, et encore le milieu, et ils obtenaient comme cela des intervalles qui à leur oreille effectivement sonnaient juste. Pendant longtemps les musicologues ont essayé d'expliquer cette pratique ; en fait, cela correspond non pas à des moyennes arithmétiques de fréquence mais à des moyennes harmoniques, puisqu'il s'agit de moyennes arithmétiques de longueur d'onde, ce qui indique que la gamme tempérée est en fait intermédiaire, c'est la moyenne géométrique qui est intermédiaire entre une moyenne harmonique et une moyenne arithmétique -- vous savez ce que cela veut dire, la moyenne arithmétique de deux nombres  $a$  et  $b$  c'est  $(a+b)/2$ , la moyenne harmonique  $2/[(1/a) + (1/b)]$  et la moyenne géométrique  $\sqrt{ab}$  qui est aussi la moyenne géométrique des moyennes arithmétique et harmonique --. Partant de là, il était naturel d'écrire une déformation de l'algèbre précédente en posant

$$P_{\mu}^{\lambda} = P_{\mu} (1 - \lambda i \partial_q)^{1/\lambda}$$

redonnant l'expression précédente lorsque  $\lambda \rightarrow 0 \dots$

A.Lichnerowicz :  $\lambda$  est le paramètre de déformation...

J.Sternheimer : c'est cela. Et ces  $P_\mu^\lambda$  engendrent une algèbre qui est en général de dimension infinie parce qu'elle comprend comme générateurs tous ceux que l'on déduit par les crochets et dont je vous ai écrit l'expression ici :

tous les 
$$P_\mu^{(\lambda, n)} = P_\mu (1 - \lambda i \partial_\mu)^{(1/\lambda) - n - 1} \prod_{k \leq n} (1 - k\lambda) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

(tableau III), mais il y a des cas où cela se simplifie parcequ'il y a une dégénérescence et que tous (ou presque tous) les opérateurs s'égalent, et c'est le cas pour  $\lambda \rightarrow 0$  où l'algèbre  $\mathcal{M}$  devient celle du groupe de Weyl --avec des opérateurs en double, en triple, mais enfin ce n'est que celle-là-- ; pour  $\lambda = 1$  on obtient une contraction de l'algèbre de Lie du groupe conforme qui est de dimension 15 ; et on a en fait construit ici une espèce de déformation qui change la dimension et qui est plus précisément ce que l'on peut appeler l'"unification spontanée" des deux algèbres ( $\lambda \rightarrow 0$  et  $\lambda = 1$ ), telle que l'on puisse trouver deux homomorphismes de cette algèbre (un sur chacune des deux premières), c'est-à-dire que pour une certaine valeur du paramètre elle se réduit à l'une, plus simple, pour une autre valeur elle se réduit à l'autre, et en général elle ne les contient pas. C'est d'ailleurs une technique que l'on peut supposer assez générale, parce que lorsqu'on a par exemple des problèmes que l'on traite usuellement par des brisures de symétrie, avec un spectre donné par un champ de forces et puis l'influence d'un autre champ de forces qui est considéré comme plus petit, on est bien embêté quand les deux champs de force sont du même ordre de grandeur, car on a alors deux symétries à marier et on ne sait pas comment ; et on peut penser qu'une technique de ce type là, que l'on peut appeler unification spontanée (de deux groupes ou) de deux algèbres de Lie, doit pouvoir s'appliquer.

En tout cas ici elle s'applique, et l'unification spontanée de W et de cette algèbre de dimension 15 c'est cette algèbre de dimension infinie, et ce sont les deux seules contractées comme cela de cette dernière qui sont incluses dans (ou contractées de) l'algèbre de Lie du groupe conforme, c'est-à-dire les deux seules qui soient au moins localement causales (2°). Et celle-ci ( $\lambda = 1$ ) va donc donner un spectre de la forme  $m = m_0 (1 + \alpha n)$ , ou encore  $m = m_0 \alpha n$ , cela dépend un peu de la façon dont on écrit les opérateurs : et d'ailleurs si on a  $m = m_0 (1 + \alpha n)$  et  $m = m_0 e^{\alpha n}$ , en retranchant de la première la seconde pour la valeur  $m_0$  ( $n = 0$ ), c'est-à-dire en considérant les fréquences des vibrations différentielles, on obtient effectivement  $m = m_0 \alpha n$ .

Nous avons donc obtenu les deux spectres : comment maintenant les mélanger, afin d'en déduire les masses ? Cela n'est plus un problème d'algèbres de Lie mais un problème d'analyse diophantienne, c'est-à-dire d'approximation par les rationnels,

et je vous montre rapidement la solution (tableau IV). C'est techniquement d'apparence assez compliqué, mais la signification est très simple. Si on note  $||p/q||$  la différence, comptée positivement, entre  $N \log(p/q) / \log 2$  et l'entier le plus voisin, et  $p_{r+2}$  le nombre premier de rang  $r+2$ , alors les valeurs, croissantes avec  $r$ , de  $N$  vérifiant pour tous les entiers  $p$  et  $q < p_{r+2}$  la relation

$$||p/q|| \leq (r/(r+\epsilon_r)) N^{-1/r}$$

--ça, ça veut dire que ce qu'on demande c'est que l'exponentielle approche toutes les fractions rationnelles  $p/q$  pour  $p$  et  $q$  plus petits qu'une certaine valeur, d'une certaine quantité qui soit suffisamment petite, et cette valeur-là, c'est la théorie de l'approximation par les rationnels (28) qui la donne, c'est-à-dire que pour l'approximation simultanée de  $r$  nombres linéairement indépendants, on a effectivement une infinité de solutions avec cette expression là -- et d'autre part  $r < \log N / \log \gamma + 1/2$ , où  $\gamma$  est la constante de Paul Lévy (29) -- ça c'est parce que à l'infini, vous savez peut-être que dans la décomposition d'un nombre en fraction continue les  $(q_n)^{1/n}$  (si  $p_n/q_n$  est la n<sup>ème</sup> "meilleure approximation" d'un nombre réel donné au hasard) tendent asymptotiquement vers cette constante qui vaut 3,275... C'est d'ailleurs la raison, je le signale au passage car je ne sais pas si c'est très connu, pour laquelle le système décimal marche; car les ordres de grandeur successifs  $y$  sont très voisins du carré de cette constante, qui vaut 10,7 à peu près (l'ordre de l'approximation pour  $p_n/q_n$  est en effet  $(1/q_n)^2$ ): il y a bien une raison pour laquelle le système décimal est meilleur que les autres systèmes, c'est parce qu'il donne l'ordre de grandeur des réduites successives dans les approximations par les rationnels. -- Les valeurs qui vérifient ça donc (c'est-à-dire les meilleures gammes exponentielles) sont (celles de base  $2^{1/N}$  avec)  $N = 1, 12$  et  $72$ :  $N=1$  c'est quand on a simplement exactement les deux premiers harmoniques; ensuite, on peut remarquer que chaque valeur de  $N$  doit être un multiple entier de la précédente, ne serait-ce que parce que les particules pour lesquelles  $\alpha$  est le plus grand, rappelez-vous la formule de la synchronisation, sont celles qui vont être les plus stables; donc les particules les plus stables déjà obtenues une fois vont s'obtenir encore a fortiori, c'est-à-dire qu'on va avoir des spectres de plus en plus fins, inclus successivement les uns dans les autres; et alors comme multiple de 1 on obtient 12, c'est-à-dire la gamme chromatique tempérée, c'est la justification mathématique si vous voulez du fait que la gamme tempérée approche les rationnels; la solution suivante c'est 72, c'est-à-dire  $2^{1/12}$  et  $2^{1/72}$  comme meilleures gammes exponentielles qui approchent les nombres rationnels, les fractions  $p/q$ : 2 ( $N = 1$ ) marche pour les entiers jusqu'à 2,  $2^{1/12}$  approche les 6 premiers harmoniques,  $2^{1/72}$  approche les 12 premiers harmoniques, et si on continue

.../...

FIG. 3

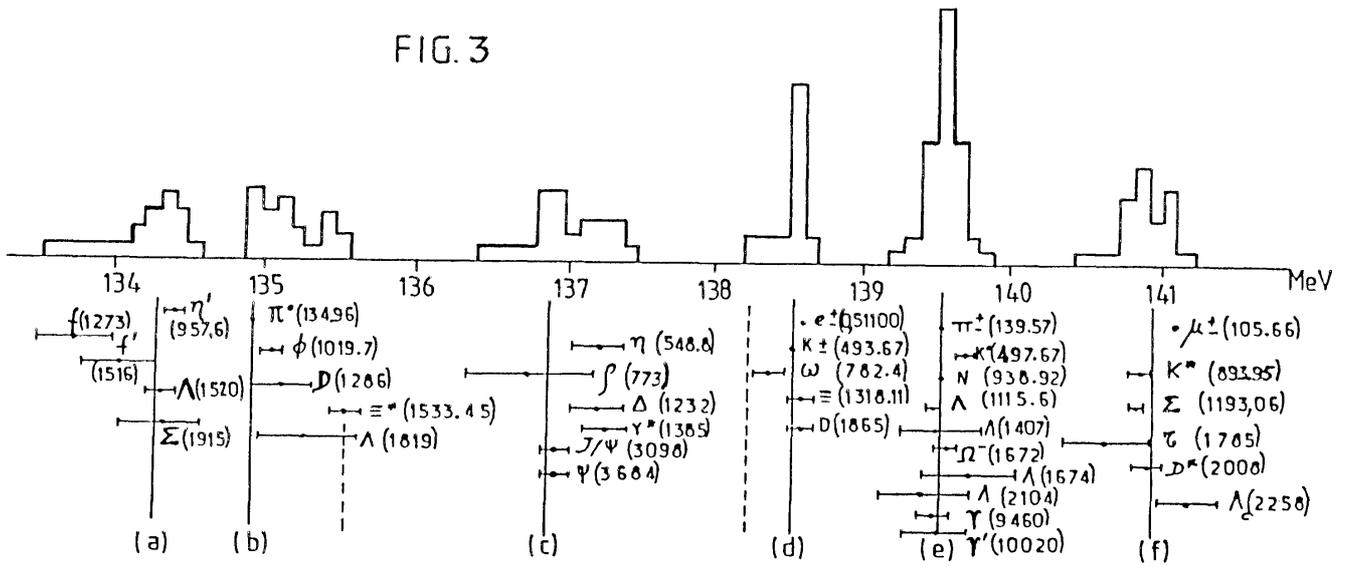
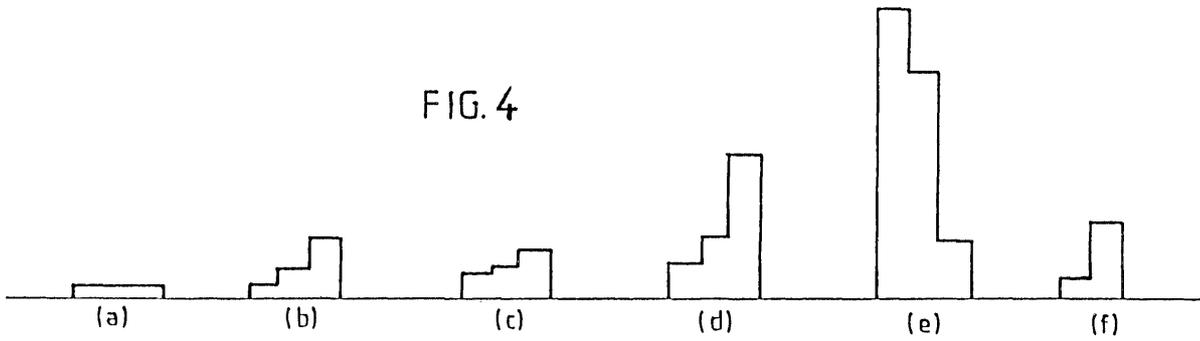


FIG. 4



sur cette lancée il n'y en a plus jusqu'à 400 000 au moins, c'est ce qu'on a vérifié sur ordinateur ; la nature fonctionne en fait autrement, parce que si on fait une analyse en base  $3/2$  --c'est-à-dire que si au lieu de demander que les harmoniques 1 et 2 soient exacts on demande que 2 et 3 aient la même erreur-- cela donne  $(3/2)^{1/24}$  qui donne  $2^{1/288}$ , et expérimentalement comme on va le voir, la nature a bien choisi  $2^{1/288}$  pour la suivante. Et si on prend 3 par exemple comme base, on obtient de même  $2^{1/1008}$ , qui a aussi un sens expérimental, notamment le rapport des masses du neutron sur le proton c'est à peu près  $2^{1/504} = 2^{2/1008}$ . Voilà donc succinctement résumée cette théorie de l'approximation des fractions entières par des exponentielles, qui est en fait la justification mathématiquement rigoureuse des gammes musicales.

Maintenant, je pense que le moment est venu de comparer avec l'expérience. Je peux d'ailleurs signaler qu'il y avait déjà eu, historiquement, des relations empiriques observées entre les masses des particules ; et avant que le modèle des quarks ne s'impose, Takabayasi (30), c'était le premier, un japonais, en 1963, avait remarqué une relation entre le carré de la masse du  $\Xi$  et le carré de la masse du nucléon,  $m_{\Xi}^2 = 2m_N^2$  ; et même, dans un article publié seulement en japonais, il avait été jusqu'à signaler la relation  $m_{\Lambda} = 2^{1/4}m_N$ , le  $\Lambda$  tierce mineure du nucléon, et  $m_{\Sigma}m_{\Lambda} = (3/2)m_N^2$ , d'où l'on peut tirer, comme  $3/2$  est voisin de  $2^{7/12}$  -- c'est la quinte --  $m_{\Sigma} = 2^{1/3}m_N$ . D'autre part, mon cousin Rudolph Sternheimer (31) (c'est vraiment dans la famille !) avait, lui, relevé de nombreuses relations, toujours empiriques, de la forme  $m_b/m_a = p/q$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers simples. Et Schwinger (32) avait trouvé en 1967 une relation empirique (dont il avait essayé de donner une justification succincte) pour l'octet des particules de spin  $(1/2)^+$ , et pour le décuplet des particules de spin  $(3/2)^+$ , de la forme  $m = m_0(1+\theta n)$ , c'est-à-dire de la forme obtenue plus haut pour  $\lambda = 1$ , avec deux masses de base,  $m_0 = 1065$  MeV pour le spin  $(1/2)^+$  et  $m_{\Delta}$  pour le spin  $(3/2)^+$ , et une "constante universelle"  $\theta$  qui valait 0,119 ; et il a trouvé une formule analogue pour les mésons en prenant  $\theta/2$ . La valeur de la constante de Schwinger se trouve expliquée, parce que  $\theta$  est simplement  $2(2^{1/12}-1) = 0,11893$  ; Schwinger avait observé une relation  $\Delta m/m = \text{constante}$ , il manquait peu de chose pour en déduire l'exponentielle, et c'était la constante de la gamme tempérée...et puis tout ça est passé aux oubliettes quand le modèle des quarks s'est largement développé.

Voici donc (fig.3) la figure de base que je vais essayer de bien vous expliquer : là s'il y a quelqu'un, s'il y a une personne qui ne comprend pas, il faut le dire, parce que ça c'est vraiment la base. Alors, comment faire pour voir le rapport qu'il y a entre les particules et la gamme tempérée ? Eh bien la manière la plus simple, c'est de regarder modulo : parce que si ce ne sont pas toutes les valeurs

(de  $n$ ) qui sont représentées, eh bien au moins en divisant (ou en multipliant) un nombre suffisant de fois par  $2^{1/12}$ , et en portant toutes les valeurs obtenues sur un demi-ton, on devra avoir quelque chose : s'il n'y avait aucun rapport avec la gamme tempérée, on observerait un fouillis : si toutes les particules, les stables et les instables, étaient rigoureusement sur la gamme tempérée, elles seraient toutes concentrées sur un point. Est-ce que c'est bien clair ? Est-ce qu'il y a une personne qui n'a pas compris ? Ici j'ai réduit les masses des particules à une valeur voisine de la masse de l'une d'elles, le pion, c'est-à-dire autour de 137 MeV. Alors, un demi-ton entourant la masse du pion ça fait entre 133, et quelques MeV et 141, et quelques MeV : il y a le pion chargé qui fait 139,57 MeV, le pion neutre qui fait 134,96 MeV, et si on prend par exemple le nucléon, eh bien si (en prenant sa masse moyenne, soit 938,926 MeV) on le divise trois octaves plus bas, et  $2^{1/4}$  au-dessus, on retombe sur 139,57, c'est-à-dire que le nucléon se retrouve bien aligné avec le pion chargé. Si on prend le  $\Lambda$ , il est 8 fois plus lourd que le pion chargé, donc ils se retrouvent alignés ; le  $\Omega^-$  est une quinte juste au-dessus du  $\Lambda$ , donc il se retrouve aligné, et ainsi de suite. D'autres particules se retrouvent dans d'autres régions, ici on en trouve qui se retrouvent alignés avec le pion neutre, est-ce que c'est bien clair ?

Daniel Sternheimer : Et en hauteur, c'est quoi ?

Joël Sternheimer : Ceci est un histogramme, c'est-à-dire que les valeurs que vous voyez en-dessous, je les ai reportées en haut : pour celles qui sont très précises j'ai fait un rectangle allongé vers le haut, pour celles qui sont moyennement précises j'ai fait un carré de même surface, et pour celles qui sont imprécises, j'ai fait un rectangle allongé horizontalement encore de même surface, pour avoir quelque chose d'assez fin. Alors la première chose qu'on constate, c'est qu'effectivement, toutes les particules stables -- de durée de vie  $> 10^{-12,5}$  sec. en tout cas, c'est une valeur empirique -- sont bien dans cette région là : vous voyez l'électron le kaon chargé, le  $\Xi$ , le D que je vous ai fait entendre tout-à-l'heure, le pion chargé, le kaon neutre, le nucléon, le  $\Lambda$ ,  $\Omega^-$ , le muon, le tau, le  $\Sigma$ , etc... (vérifiant toutes  $||m/m_N|| \leq 1/(3\sqrt{3})$ , valeur provenant de l'analyse diophantienne). Et vous savez que récemment on a découvert une particule B, un méson beauté, dont la masse vaut exactement 4 fois la masse du  $\Xi$  (soit 5272 MeV) et qui se trouve donc juste sur la même ligne : elle est 100 fois plus stable (avec une durée de vie légèrement supérieure à  $10^{-12}$  sec.) que prévu par le modèle standard, mais en revanche, comme particule stable, elle se trouve bien dans cette zone là. Et ici (à gauche sur la fig.3) on trouve d'autres particules, qui sont toutes instables -- qui sont des résonances, ou alors qui se désintègrent électromagnétiquement comme

.../...

le pion neutre, mais qui est effectivement instable relativement-- et qui forment bien avec les premières six groupements distincts (correspondant en première approximation à la gamme  $2^{1/72}$ ).

Jean Thierry-Mieg : C'est-à-dire que l'électron est légèrement désaccordé par rapport au pion ?

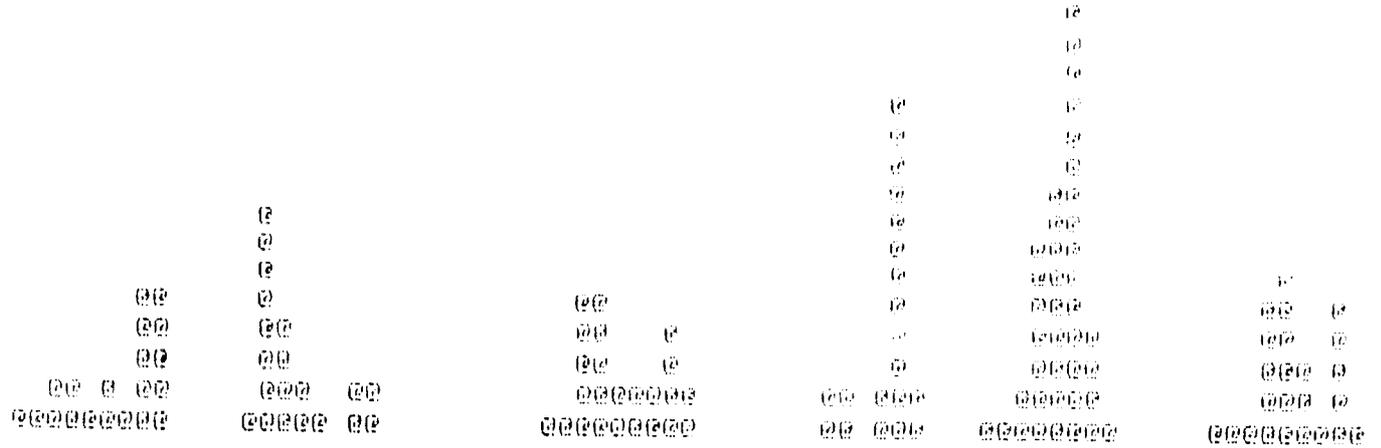
Joël Sternheimer : modulo  $2^{1/12}$ , oui, il y a 1/16è de ton d'écart environ. (Notons que ce désaccord a une fonction : ainsi l'atome d'hydrogène peut être compris comme accordant l'électron et le proton sur la même longueur d'onde, par effet Doppler relativiste : cette propriété est évidente dans le système du centre de masse, et est encore vraie lors d'un changement de repère lorentzien si l'on considère les longueurs d'onde moyennes sur une période de révolution). Modulo 2 aussi, je vous ai fait entendre plus haut la désintégration d'un kaon en deux pions, puis le pion neutre donnant une paire de photons donnant électrons-positrons, vous avez entendu que c'était voisin d'octaves successives, sauf que l'électron est un quart de ton plus bas que le pion neutre modulo un nombre entier d'octaves.

En-dessous, sur la figure 4, ce sont les fractions entières modulo  $2^{1/12}$  : vous voyez que ça ressemble. Si je prends les fractions  $p/q$  ( $>1$ ), c'est-à-dire toutes les fractions de la forme  $6/5$ ,  $4/3$ ,  $12/11$ , etc...ayant un numérateur et un dénominateur  $\leq 12$ , eh bien -- en les portant avec une hauteur proportionnelle à  $a(p) \times a(q)$  avec  $a(p) = 1$  pour  $p \leq 6$  et  $\frac{1}{2}$  pour  $7 \leq p \leq 12$  (et en ajoutant celles qui se retrouvent modulo  $2^{1/12}$  dans un même intervalle de  $2^{1/480}$ ) -- on obtient cela. Vous voyez tout de suite une certaine ressemblance entre les deux diagrammes : on peut calculer le coefficient de corrélation qui vaut 0,79 à peu près --  $\pm 0,12$  --, ce qui est donc assez important, mais qui est quand même  $<1$  ; c'est assez important d'ailleurs qu'il soit  $<1$ , parce qu'on peut tout de suite se poser une question, à savoir est-ce qu'on observe bien là une réalité, ou bien ne serait-ce pas une illusion due à un biais dans la façon d'observer : est-ce que ça ne prouve pas simplement que les particules correspondent aux harmoniques, et que la gamme tempérée n'a rien d'autre à voir là-dedans que le fait qu'elle approche justement les harmoniques ? Eh bien, je vous expliquerai tout-à-l'heure comment on peut montrer que non.

Pour l'instant, je vous montre...voilà, pour vous montrer à quel point c'est simple, ça c'est mon petit cousin Laurent qui est au lycée et qui a vérifié avec son ordinateur (fig.5), voyez il a bien retrouvé à peu près les six groupements que je vous ai montrés tout-à-l'heure, et il a vérifié pour d'autres valeurs, par

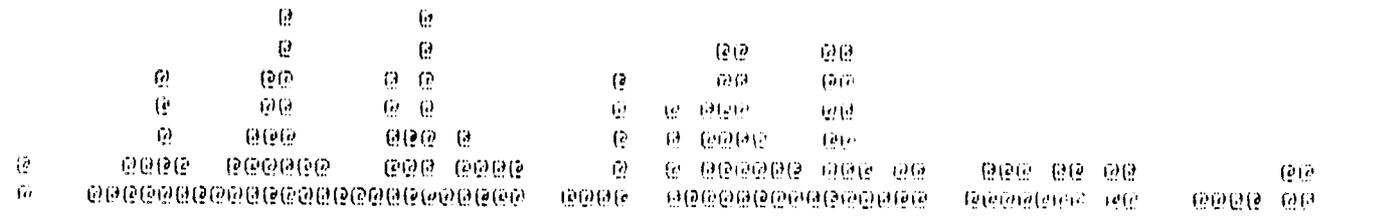
BASE... 1.0594631  
 NUMERO DU FLOPPY...2

$2^{h_1}$



BASE... 1.0956727  
 NUMERO DU FLOPPY...2

$2^{h_1}$



BASE... 1.35  
 NUMERO DU FLOPPY...2

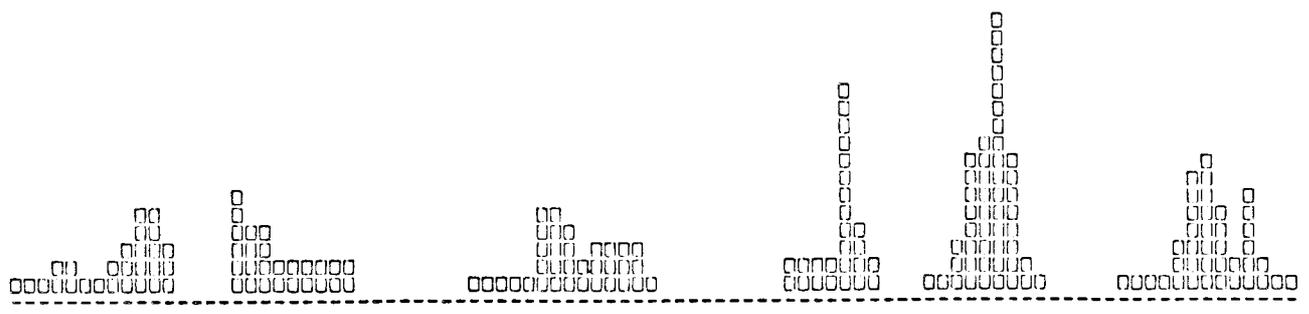
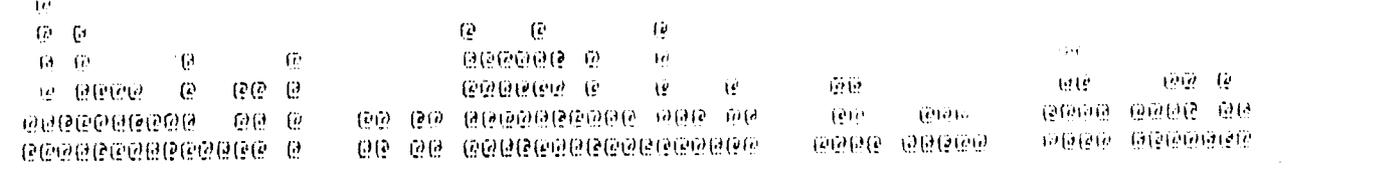
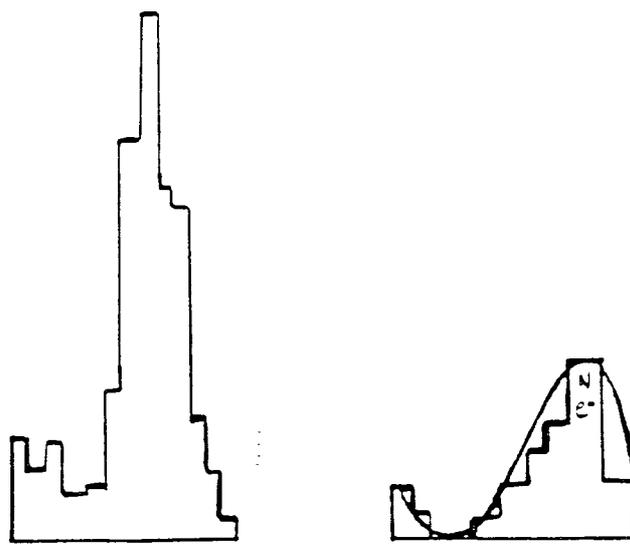
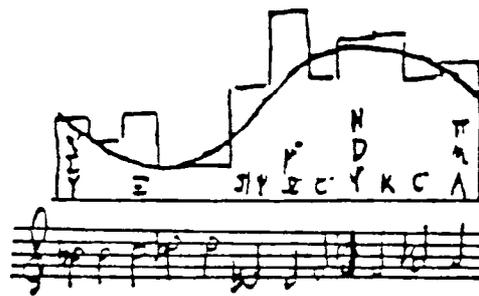
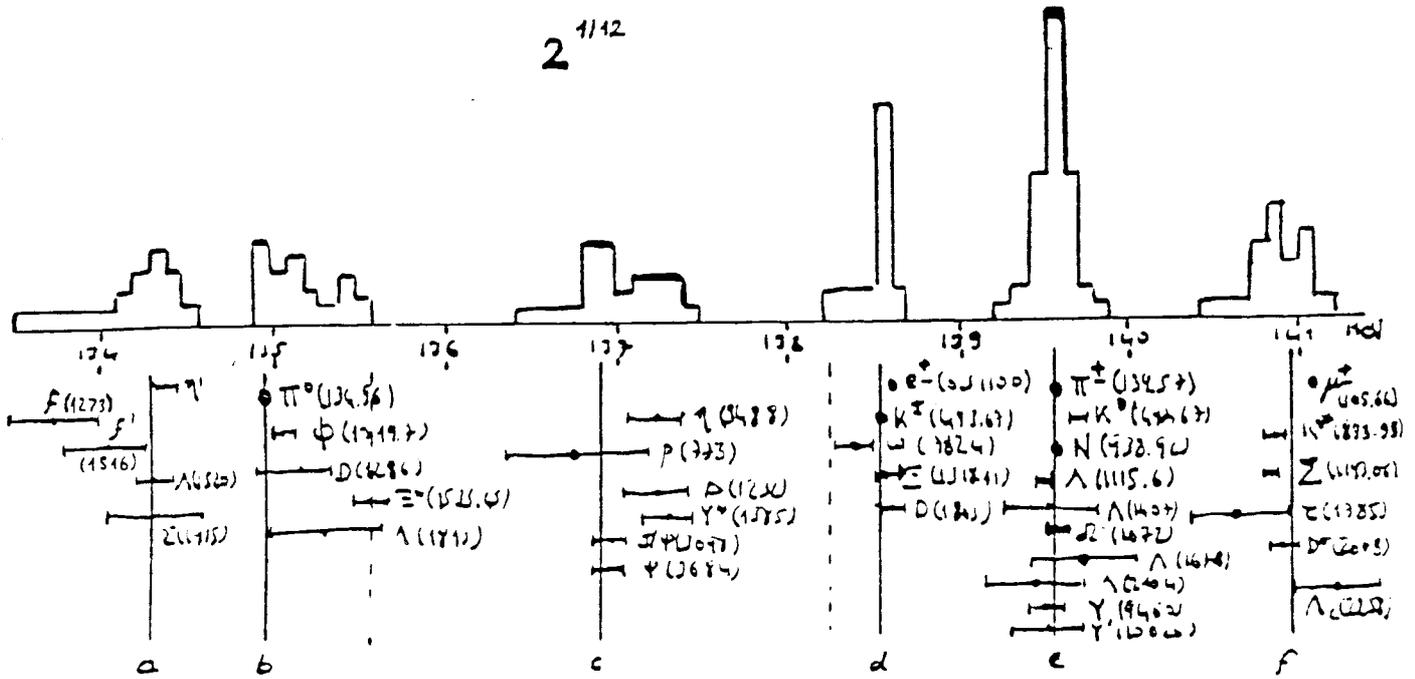


FIG. 5

Particules modulo diverses valeurs (en haut), modulo  $2^{1/12}$  (en bas).



Particules modulo

$2^{1/72}$

$2^{1/288}$

FIG. 6

Gammes observées: particules modulo  $2$ ,  $2^{1/12}$ ,  $2^{1/72}$ ,  $2^{1/288}$ .

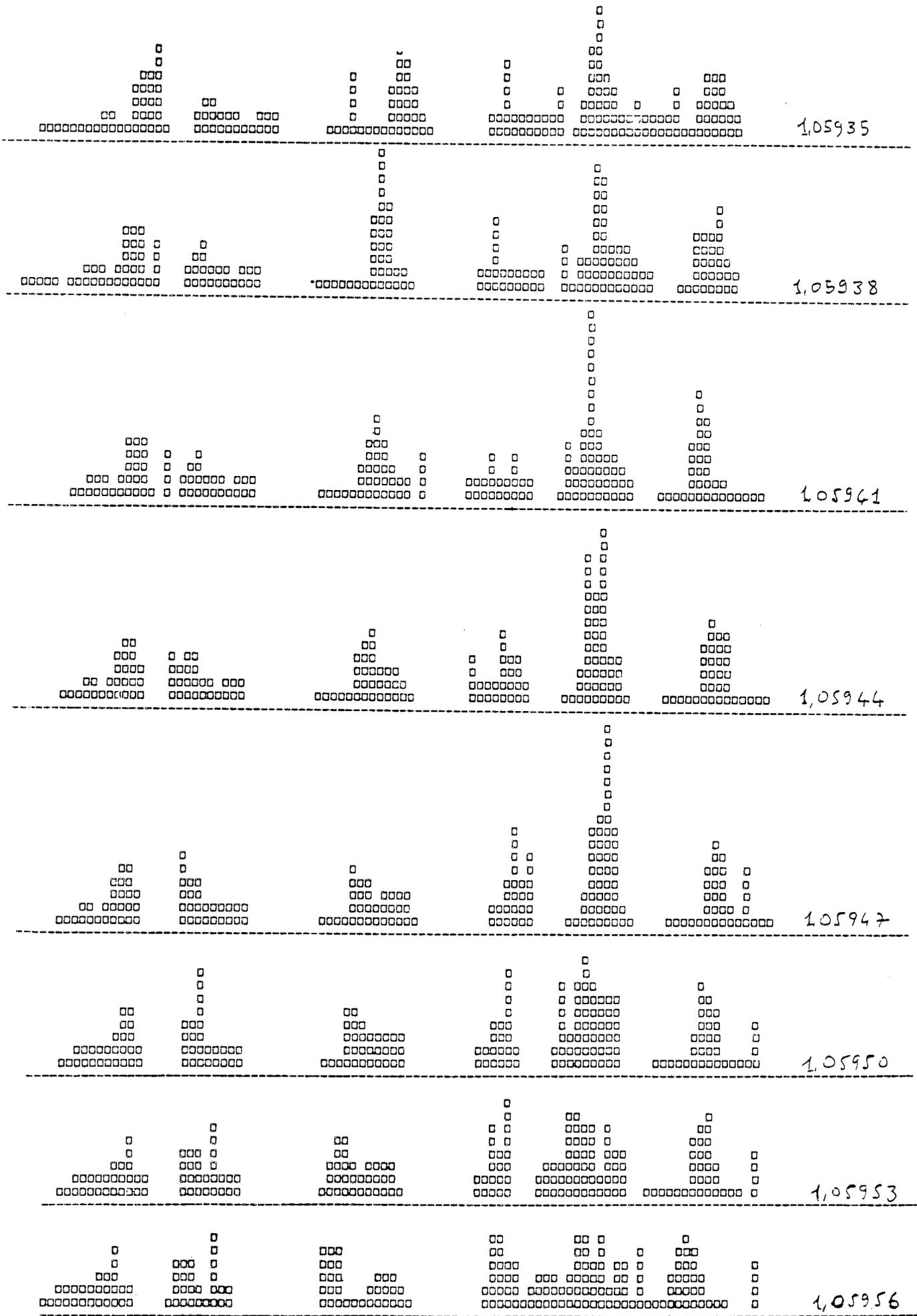


FIG. 7

Particules modulo 1,05935 à 1,05956 par pas de  $3 \cdot 10^{-5}$ .

exemple, voilà ce que ça donne pour  $3^{1/12}$ , pour 1,35 valeur prise au hasard, vous voyez ce n'est pas du tout la même répartition. Voilà au-dessous la même chose faite encore sur ordinateur par Sylvain Baron, qui a fait plein de calculs sur ordinateur pour vérifier tout ça : et vous voyez qu'entre ce que Laurent a trouvé sur son ordinateur avec une représentation à lui et Sylvain Baron sur son ordinateur avec sa façon de présenter, ils ont trouvé pareil. Et ils ont retrouvé la forme des groupements en question modulo  $2^{1/12}$ .

Là (fig.6) je vous montre avec les masses des particules modulo  $2^{1/12}$ , toutes les gammes que l'on trouve effectivement, transversalement (en faisant varier la base de l'exponentielle), pour les particules. On trouve la base 2 -- alors là c'est en prenant toutes les particules qui sont dans les tables de Matts Roos et du Particle Data Group (33), qui sur l'histogramme modulo  $2^{1/12}$  ont été limitées à celles qui sont connues avec une précision suffisante pour figurer dans ce schéma, c'est-à-dire inférieure à la valeur donnée par l'analyse diophantienne, ce qui en laissait un peu moins de 40 -- : vous voyez qu'on obtient bien une répartition statistique en tout cas autour d'octaves successives, il y en a beaucoup plus dans une zone que dans l'autre, on retrouve une zone stable avec le nucléon au maximum de stabilité. Là c'est  $2^{1/72}$  telle qu'on la devine d'ailleurs sur la fig.3, et là c'est  $2^{1/288}$  telle qu'on la devine aussi puisque vous voyez le déplacement (pour la ligne où figure l'électron) d'environ  $1/4$  et (pour la ligne où figure le pion neutre) d'environ  $1/2$  intervalle par rapport à une gamme  $2^{1/72}$  exacte (ce dernier histogramme ---  $2^{1/288}$  --- ne portant plus que sur une vingtaine de particules suffisamment précises).

Vous voyez ici (fig.7) le résultat d'une étude que l'on a faite sur ordinateur en prenant comme indice la somme des variances des différents groupements pour essayer de trouver les distributions les plus significatives, sur 10 000 bases entre 1 et 2 par pas de  $10^{-4}$  : entre 1,01 et 1,15, c'est-à-dire ce qui entoure du plus près la gamme tempérée, vous voyez ici qu'on trouve la meilleure par pas de  $10^{-4}$  comme étant 1,0595 suivie par d'autres qui sont des "échos" de la forme  $2^{n/72}$  --  $2^{7/72}$ ,  $2^{8/72}$ ,  $2^{10/72}$ . Voici (toujours pour les particules) ce qui se passe lorsqu'on s'approche de la base  $2^{1/12}$ , par pas de  $3 \cdot 10^{-5}$  (fig.7) vous voyez 1,05935, puis 38, les groupements commencent à se former, 41, 44, 47, alors là ils sont presque identiques à ce que vous avez vu -- la gamme tempérée c'est 1,059463 --, ensuite 50, 53, 56, vous voyez ça dégringole très vite. Voici (fig.8) par pas de  $10^{-5}$ , on voit bien que c'est mettons entre 46 et 47 que ça se situe, et voici (fig.9) en faisant précisément un graphique des variances entre 1.05935 et 1,05955, qui permet de déterminer la meilleure gamme expérimentale comme étant 1.05946 à  $10^{-5}$  près ( $2^{1/12} = 1,059463$ ). C'est-à-dire qu'il y a incontestablement la gamme tempérée dans les particules. Et pour ce qui est de la question

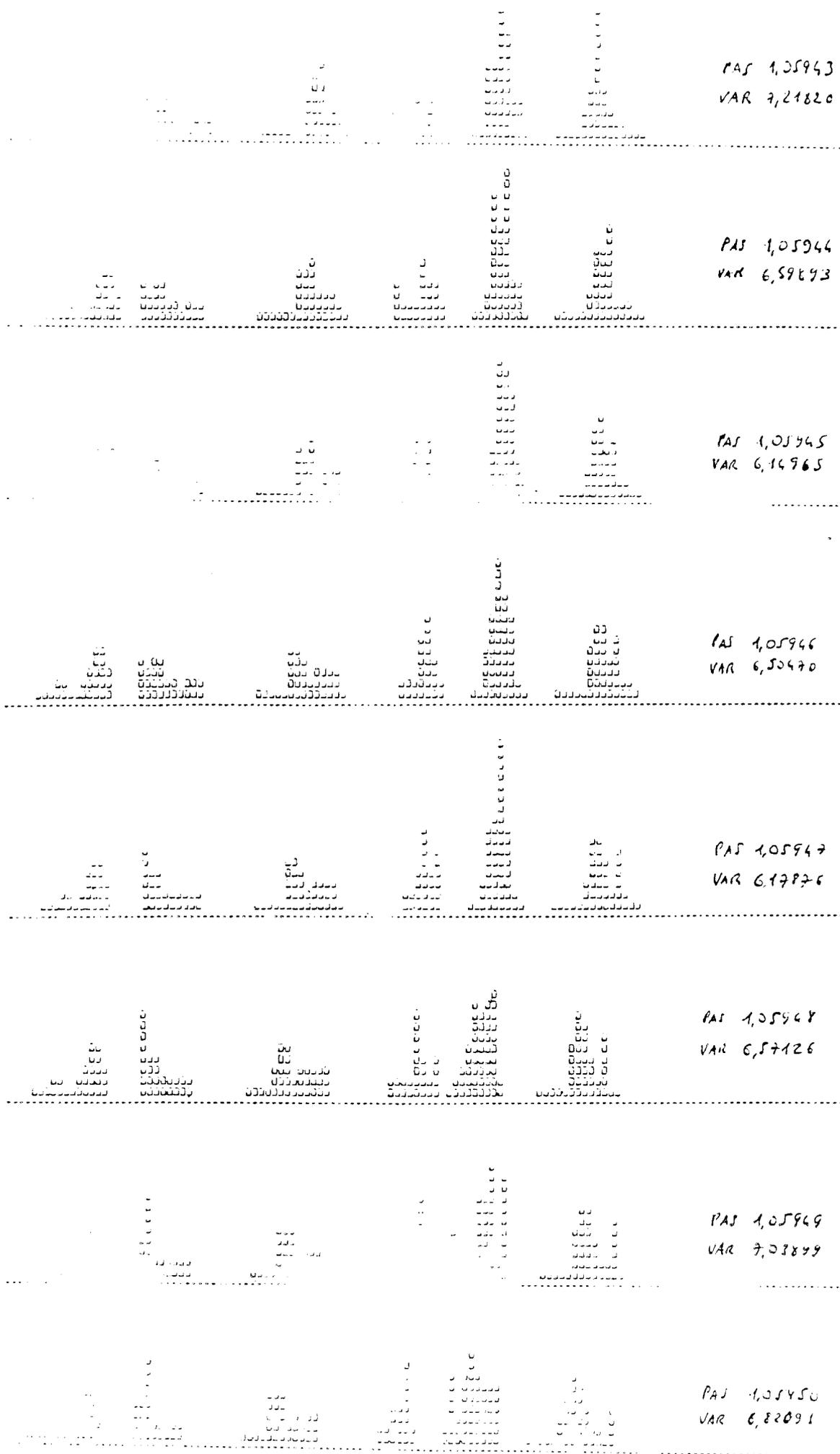


FIG. 8

Particules modulo 1,05943 à 1,05950 par pas de  $10^{-5}$ .

$$\downarrow 2^{1/12} = 1,059463094$$

VARIANCE MINIMUM POUR  $\exp \alpha = 1,05946 \pm 0,00001$

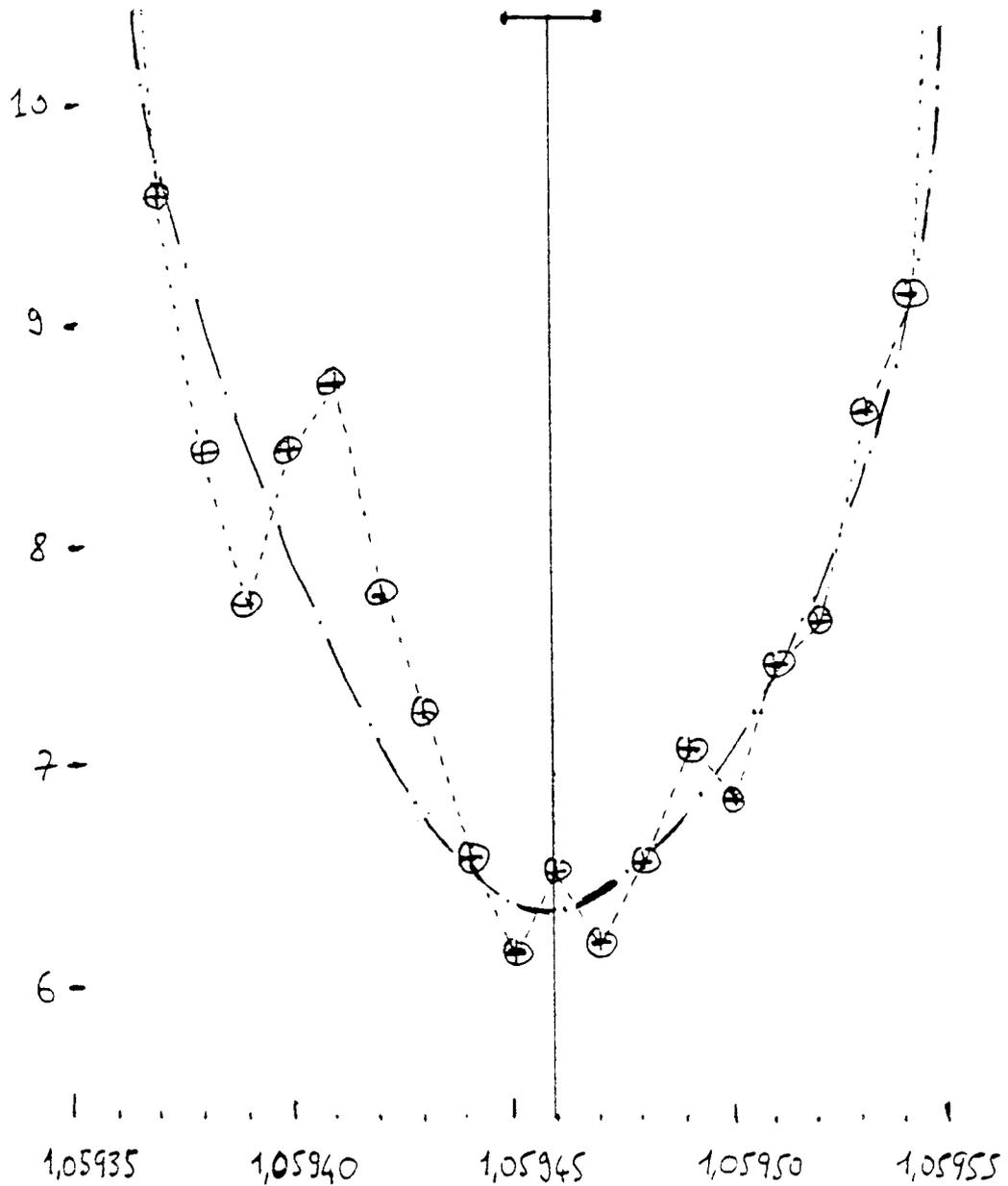


FIG. 9

Variance (= variance moyenne de chaque groupement x nombre de groupements) de la distribution des masses des particules modulo  $e^\alpha$ , pour  $e^\alpha$  variant de 1,05935 à 1,05955 par pas de  $10^{-5}$ .

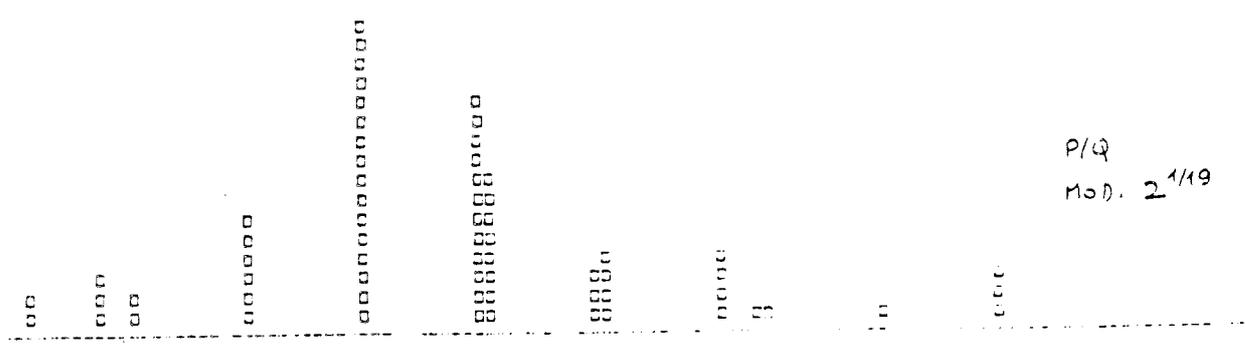
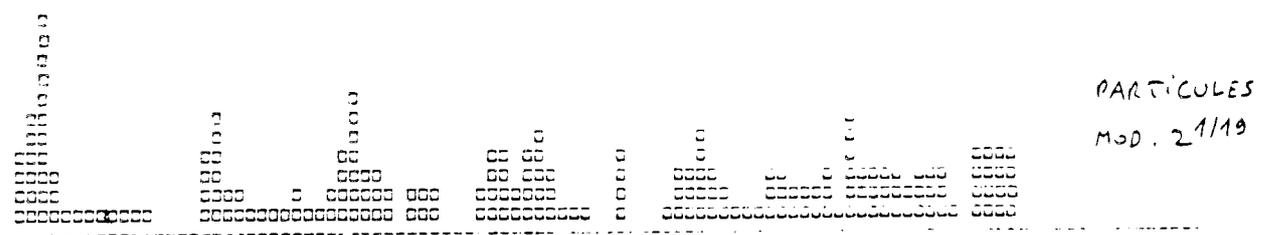
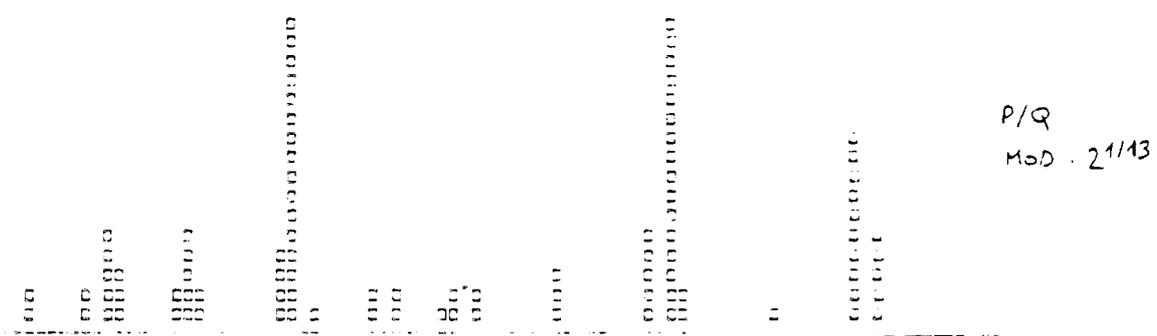
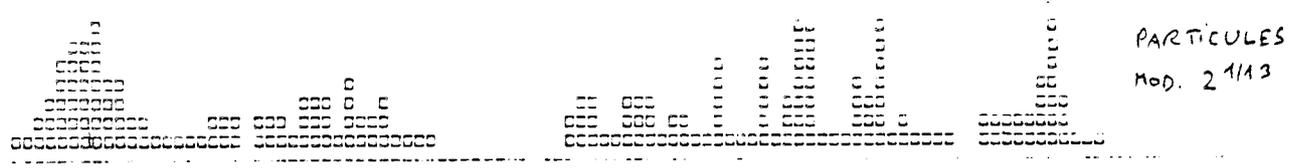
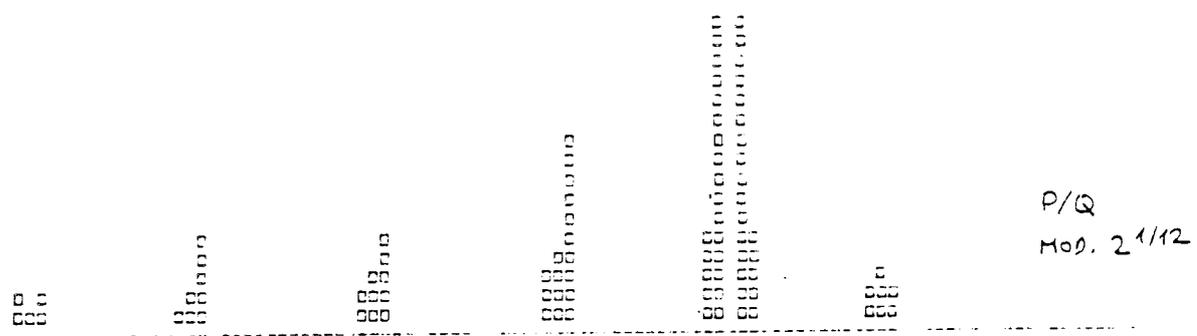
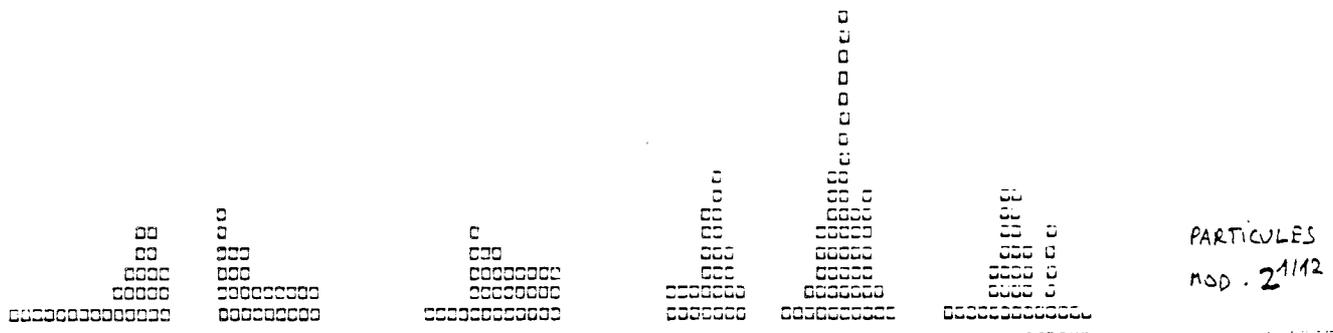


FIG. 10

Particules et fractions entières  $p/q$  ( $q < p \leq 12$ ) modulo  $2^{1/N}$  ( $N=12, 13, 19$ ).

dont je vous parlais tout-à-l'heure --est-ce que c'est une illusion due au fait que c'est égal aux rapports  $p/q$  ou est-ce que c'est bien la gamme tempérée elle-même --voici la réponse, vous voyez (fig.10), déterminé par ordinateur, en haut les particules modulo  $2^{1/12}$ , et en regard les fractions  $p/q$  modulo  $2^{1/12}$ , vous voyez que ça se ressemble, et par exemple voici modulo  $2^{1/13}$ , vous voyez que non seulement les répartitions deviennent chaotiques, mais qu'en plus ça ne se ressemble plus, et pour prendre un autre exemple voici modulo  $2^{1/19}$  -- ce serait une assez bonne approximation pour les  $p/q$ , qui suivrait  $2^{1/12}$  -- eh bien vous voyez la distribution des  $p/q$  modulo  $2^{1/19}$  est assez régulière, mais les particules ne suivent pas. Voici encore  $2^{1/22}$ , qui est une gamme quelquefois utilisée par les théoriciens de la musique hindoue, c'est encore plus frappant: alors que l'on voit bien un groupement des fractions autour d'une certaine valeur, on n'observe rien de tel pour les particules. Ceci montre que non seulement il y a des particules qui approchent des fractions entières (correspondant à des coïncidences d'harmoniques) mais qu'il y en a bien d'autres, qui forment exactement des intervalles tempérés, c'est-à-dire qu'il y a bien une synchronisation sur l'exponentielle ; sinon, pour tout  $N$ , c'est-à-dire même pour une répartition chaotique on garderait la corrélation entre les particules modulo  $2^{1/N}$  et les  $p/q$  modulo  $2^{1/N}$ . Ceci montre que le phénomène de synchronisation est bien réel, et confirme l'hypothèse que l'identité de masse de tous les électrons est due à ce phénomène. On vérifie d'ailleurs que, régulièrement, les particules de base (d'une même famille ou série) sont accordées en gamme tempérée, et qu'après on a des relations linéaires, comme c'était d'ailleurs le cas dans la formule de Schwinger où le  $\Lambda$  ne marchait pas, mais est donné par la valeur  $2^{1/4}$  exacte (par rapport au proton).

Alors maintenant, ce qui est intéressant, c'est que si on compare (les particules modulo  $2^{1/12}$ ) avec des notes de musique utilisées dans différents pays -- ici (fig.11c) c'est une gamme iranienne dont je vous ai parlé tout-à-l'heure, là (fig.11d) une gamme chinoise --eh bien, les différences qu'on observait entre les particules et les  $p/q$  s'en vont. Voici plus précisément (fig.12), à partir de ce que je viens de vous montrer, une moyenne : en haut donc les particules modulo  $2^{1/12}$ , et en bas ce sont les intervalles musicaux utilisés dans différents pays (représentés modulo  $2^{1/12}$ ), que j'ai pondérés de façon à ce qu'il y en ait à peu près autant en orient et en occident : vous voyez que là, on a une correspondance assez remarquable entre les notes de musique effectivement jouées par les musiciens et les masses des particules ; on a mis en colorié en haut les particules stables, et en-dessous les notes de la gamme harmonique --c'est-à-dire celle qui correspond aux accords formés sur les harmoniques essentiellement jusqu'au sixième : vous voyez bien la correspondance.

FIG.11a (Particules)

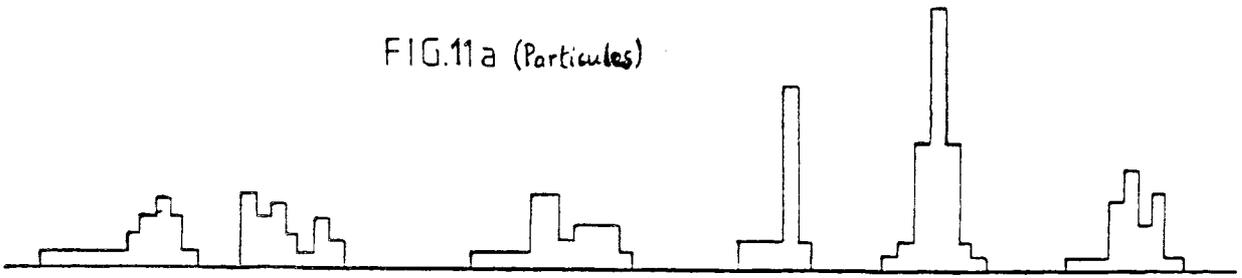


FIG.11b (p/q)

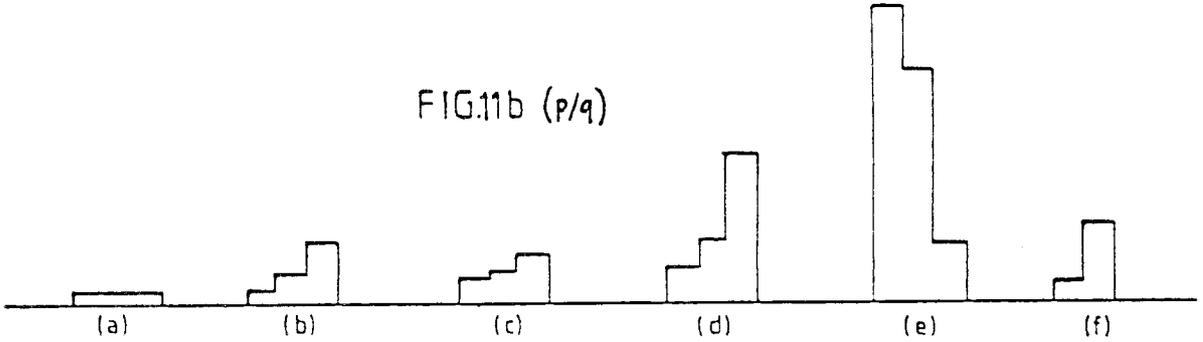


FIG.11c  
(Iran)

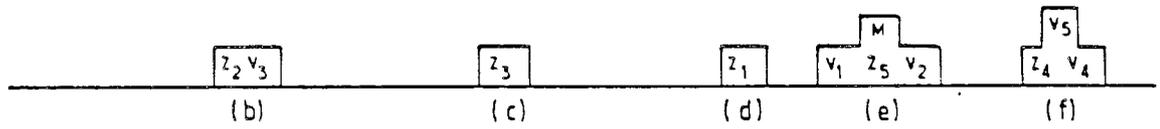


FIG.11d  
(Chine)

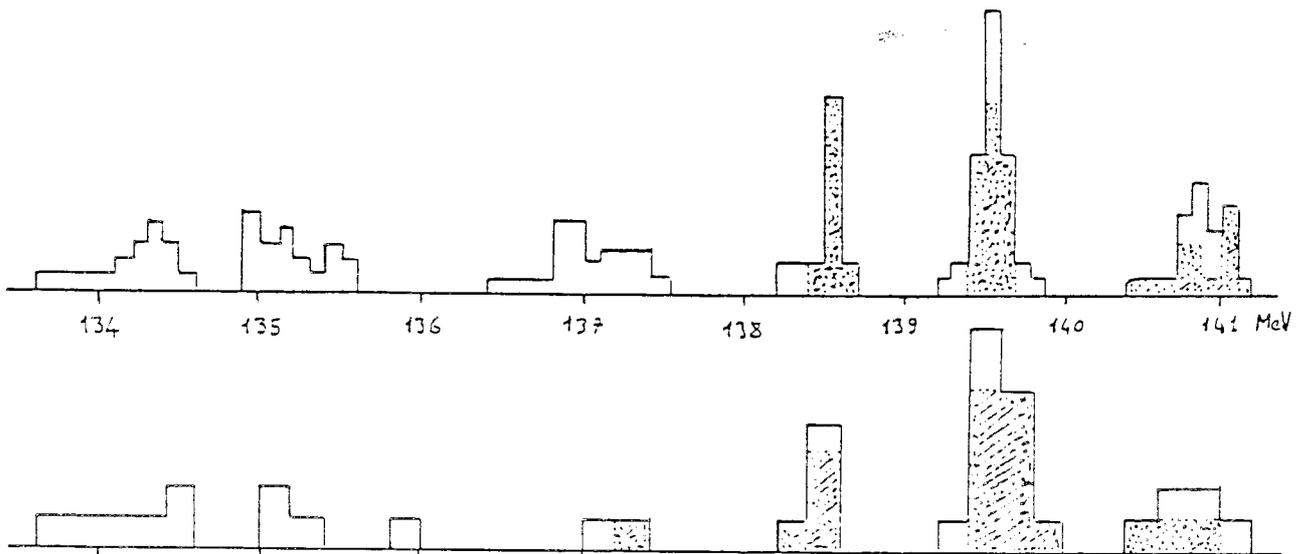
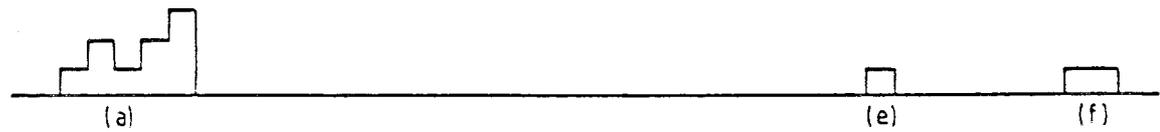


Fig. 12

Comparaison des masses des particules modulo  $2^{1/12}$  (en haut; en couleur = particules stables) et des intervalles musicaux de divers pays (en bas; en couleur = pays occidentaux) modulo  $2^{1/12}$ .

En fait cela correspond à un effet auquel on peut effectivement s'attendre, à savoir à des phénomènes de résonance, c'est-à-dire que les harmoniques synchronisés de particules en accord se renforcent (mutuellement) : et comme on observe bien statistiquement une gamme à base 2, cela entraîne que l'enveloppe spectrale, c'est-à-dire l'amplitude des harmoniques devra être accentuée pour les harmoniques voisins des octaves successives, ce qui va par exemple diminuer (relativement) l'harmonique 5 et accentuer l'harmonique 15, diminuer (relativement) l'harmonique 11 et accentuer au contraire même des harmoniques voisins de jusqu'à l'harmonique 31 ; et en corrigeant de cette façon l'histogramme des valeurs des  $p/q$  modulo  $2^{1/12}$ , on obtient bien quelque chose qui se rapproche des notes de musique utilisées, et des masses des particules. Ce qui confirme que ce phénomène existe dans la nature --et que l'enveloppe spectrale des particules est modifiable.

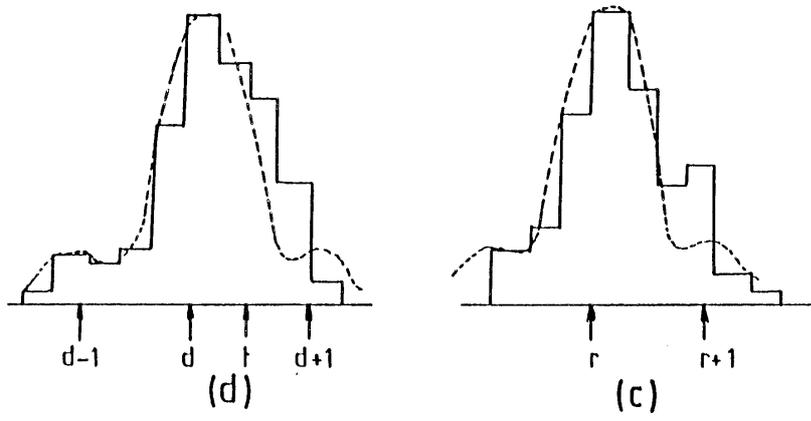
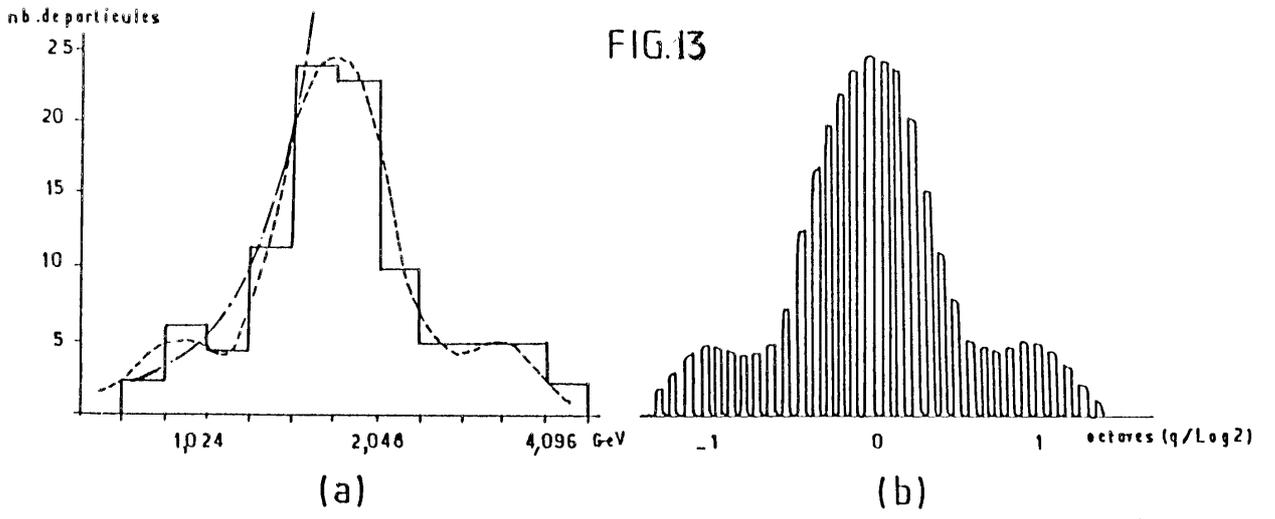
Alors pour voir d'une façon plus générale ce qui se passe, là je reviens à quelque chose d'un peu technique : c'est une équation d'ondes qui est prise dans l'échelle, c'est-à-dire que je vais essayer de déterminer ce qui se passe non plus simplement sur l'intervalle d'un demi-ton, mais globalement, la répartition globale des masses des particules. Eh bien en prenant une équation dérivée de l'équation de Klein-Gordon mais en introduisant un terme d'échelle (34), ainsi que vous voyez sur ce tableau (tableau **V**), et avec des hypothèses simples --que la dimension des particules d'une famille donnée ne dépend pas de l'échelle, et en posant une probabilité égale au carré de l'amplitude de la fonction d'onde (mais) en divisant l'échelle par 2 pour garder la même période--, on obtient, parce qu'il y a des simplifications qui apparaissent, une probabilité qui a la forme suivante à savoir

$$P(q) \sim e^{-6q^2/\text{Log}2} + (1/\sqrt{12}) e^{-q^2/2\text{Log}2} \cos^2(\pi q/\log 2) \quad (\text{où } q \sim \text{Log}m)$$

une somme de gaussiennes multipliées par des fonctions périodiques.

Et comme vous allez le voir, c'est en excellent accord avec l'expérience, et en contraste avec les modèles existants pour la répartition globale des masses des particules<sup>(35)</sup>, c'est-à-dire ceux de la Thermodynamique des interactions fortes, du "bootstraps", et du modèle des quarks --je vais y revenir-- ; et en revanche, c'est en accord avec la répartition globale des notes d'une symphonie, ça, c'est assez frappant.

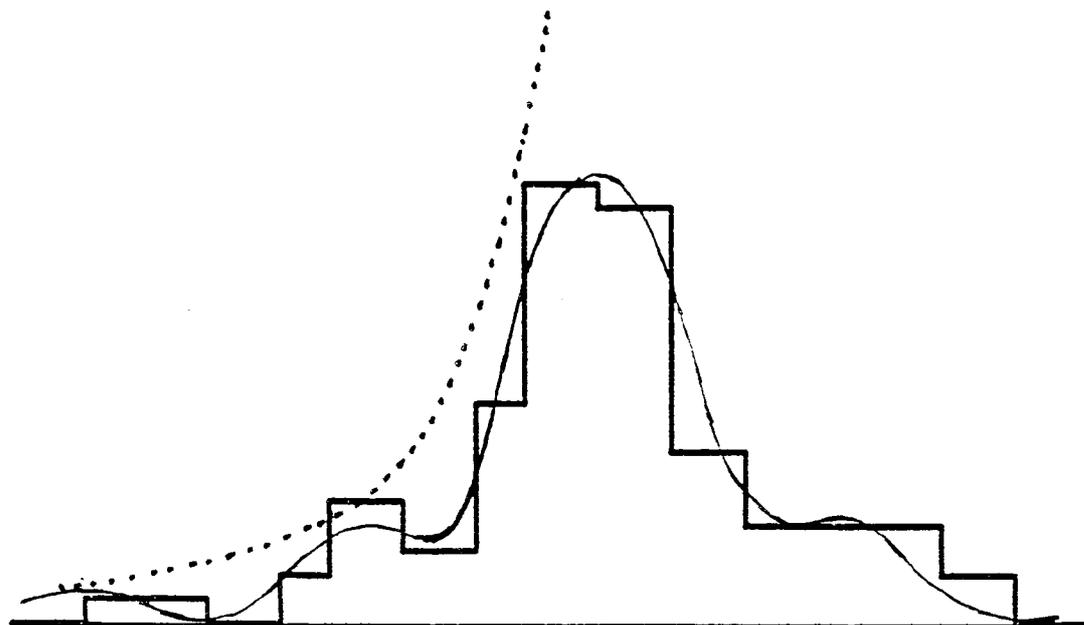
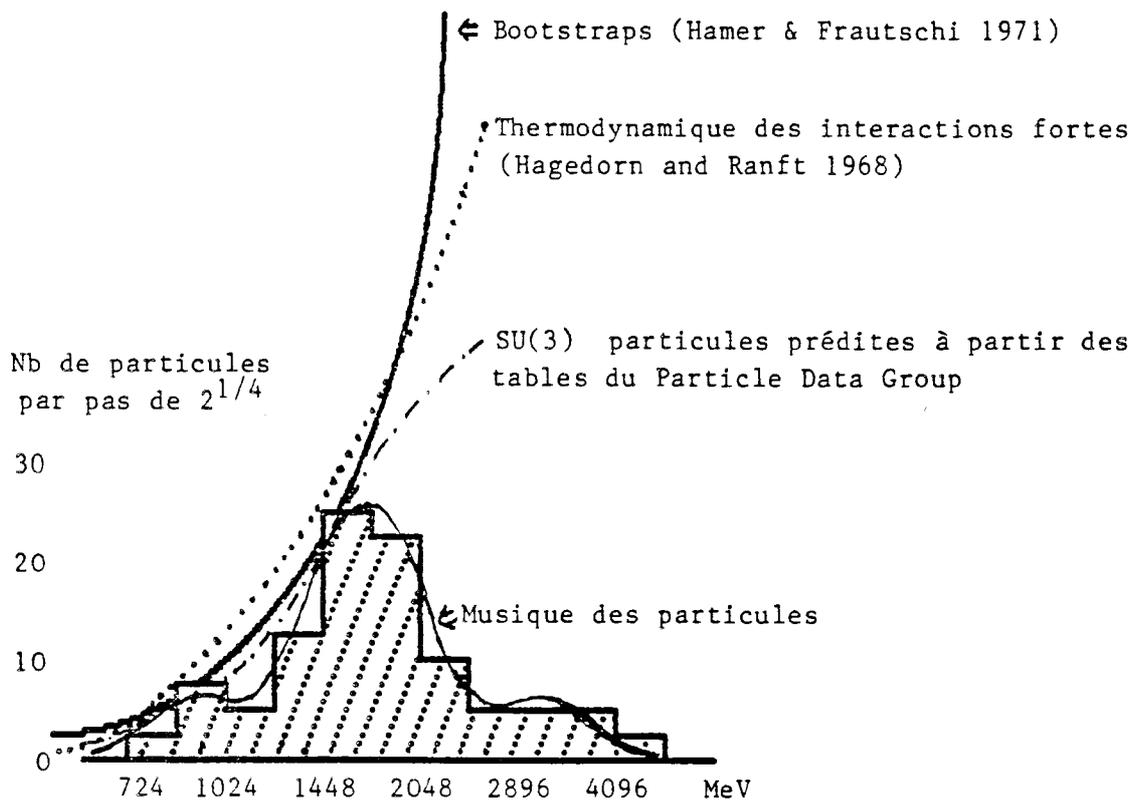
Vous voyez en haut (fig.13) l'histogramme des masses des particules observées entre 500 et 5000 MeV à peu près, la courbe que vous voyez en tirets c'est la courbe théorique que je viens de déterminer --vous voyez qu'elle concorde bien--, et en points-traits c'est la courbe théorique de la thermodynamique des interactions fortes. A droite, (b) ce serait la courbe théorique en incluant la période de  $\text{Log}2/12$  (pour  $\text{Log}m$ , soit l'exponentielle de base  $2^{1/12}$  pour les masses), c'est-à-dire que ce que je vous ai montré tout-à-l'heure, c'est précisément ce qu'il y a à l'intérieur de chacune de ces petites sinusoides là, à l'intérieur de chacun de ces pas de sinusoides.



Et ça, en-dessous, qu'est-ce que c'est ? Eh bien (d) c'est la répartition des notes des cent et quelques premières mesures de la symphonie n°40 de Mozart, la répartition globale comparée à la courbe théorique déterminée ci-dessus pour les particules. A droite (c), c'est pareil pour la chaconne de Bach, dont Heisenberg<sup>(36)</sup> disait "les notes claires sont comme un vent frais déchirant le brouillard et faisant apparaître les structures nettes cachées derrière celui-ci"...Ca m'évoque vraiment comme s'il avait eu une vision du brouillard qui se déchire avec la gamme tempérée pour les particules. Et à gauche Mozart, dont Einstein disait qu'il n'avait pas composé sa musique, mais qu'il l'avait découverte.

Alors en revanche, voici (fig.14) la comparaison un peu précise avec les différents modèles qui existaient pour ce problème. En bas vous retrouvez donc l'histogramme observé, la courbe théorique et la prédiction de la thermodynamique des interactions fortes, laquelle prédisait une répartition qui devait croître très rapidement. Vous voyez que ça collait quand même bien pour un certain nombre de valeurs, mais qu'après ça s'écartait assez nettement ; alors les gens disaient "oui mais c'est parce que ces particules-là sont trop instables et deviennent trop nombreuses pour qu'on les distingue". Bon. Même chose avec d'autres modèles : voici les états qui seraient engendrés par Bootstraps, et voilà ceux qui seraient engendrés par le modèle des quarks ou par SU (3), c'est-à-dire les particules manquantes dans les octets, celles qu'on dit toujours qu'on va trouver mais qu'on ne trouve pas, la résonance du  $\Omega$ , etc...on dit qu'on ne les trouve pas parcequ'elles sont trop difficiles à obtenir, mais que théoriquement elles existent : il reste que les particules effectivement observées, ce sont celles-là, et là il y a bien une expression qui recouvre effectivement ce qu'on observe (la forme de la courbe expérimentale n'a d'ailleurs pratiquement pas varié depuis une quinzaine d'années, alors que l'on trouvait sans cesse de nouvelles particules) ; et qui correspond à des lois "musicales" dans la matière.

Il y a en fait une raison assez simple pour laquelle cette loi s'applique en gros pour la musique, et que je peux vous montrer rapidement. Voilà (fig.16) : ça c'est des expériences qui ont été faites à propos de gens qui ont l'oreille absolue ; on a demandé à des gens à qui on jouait une note de musique de reconnaître la fréquence. Et on constate qu'ils se partagent en deux groupes, ceux qui ont l'oreille absolue et ceux qui ne l'ont pas : ceux qui ne l'ont pas font une erreur qui se répartit statistiquement comme vous voyez ici, c'est-à-dire qu'ils font toutes les erreurs possibles mais de moins en moins nombreuses au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de la fréquence effective de la note ; ceux, en revanche, qui ont l'oreille absolue, lorsqu'ils se trompent c'est en général seulement d'une octave : ou bien



Histogramme des masses des particules par pas de  $2^{1/4}$

— Courbe d'équation  $P(q) \sim e^{-6q^2/\text{Log}2} + (12)^{1/2} e^{-q^2/2\text{Log}2} \cos^2(\pi q/\text{Log}2)$

••••• Prédiction de la thermodynamique des interactions fortes

FIG. 14

Répartition globale des masses des particules: comparaison de différents modèles

ils déterminent la bonne fréquence (la note exacte), ou bien ils donnent la même note mais une octave plus bas ou plus haut : ce sont les petits pics que vous observez ici. La superposition des deux distributions fait effectivement une courbe d'allure gaussienne avec des pics aux octaves.

Voici (fig.15) d'autres exemples d'oeuvres musicales : Satie avait écrit une oeuvre qu'il demandait de jouer "de manière à obtenir un creux" : qui apparaît dans la répartition. Ici c'est un andante d'une symphonie de Haydn qui est sur une autre tonalité (que la symphonie), le résultat est décentré, le ton de la symphonie est au centre et le ton de l'andante (dont la dominante est au sommet de la répartition) est décentré. La répartition est parfois centrée sur la dominante, parfois sur la tonique, parfois sur la relative, cela varie... Pour les exemples donnés plus haut, Mozart est sur la dominante et Bach sur la relative : c'est en général centré sur la tonique ou sur la dominante. Pour les particules je peux dire que c'est sur la dominante, puisque  $\Omega^-$ , qui est à la quinte du  $\Lambda$ , lui-même de même tonalité que le pion, etc... est la dominante (en tout cas le centre de la répartition) de cette musique qui est effectivement tonale.

Pierre Claverie : L'explication que vous venez de donner pour la forme de la courbe dans le cas des oeuvres musicales s'applique-t-elle pour les particules, ou est-ce que dans ce cas cela provient seulement de l'équation de Klein-Gordon non linéaire ?

Joël Sternheimer : elle s'applique aussi, car elle provient des relations d'incertitude associées aux relations de commutation : je l'ai donnée pour qu'on ne soit pas trop dépaycé par le fait que le résultat convienne pour la musique, où il s'agit d'ailleurs d'une moyenne. C'est en fait un outil d'analyse musicologique que de considérer les oeuvres de cette façon là, on peut même comprendre que la répartition effectivement observée est liée à l'amplitude relative des harmoniques : si par exemple on a une oeuvre avec davantage d'intervalles d'une certaine valeur, par exemple la tierce majeure comme le thème de l'Hymne à la Joie de Beethoven, eh bien par les rencontres de sons les harmoniques 4 et 5 vont être augmentés en même temps que cette répartition va être déformée, en d'autres termes des écarts par rapport à cette répartition on peut inférer un timbre de son : c'est-à-dire qu'il y a un lien entre la répartition globale des notes d'une oeuvre de musique et le timbre dont cette oeuvre est en quelque sorte un développement. Et dans le cas des particules, ça veut dire que l'enveloppe spectrale peut être déterminée par toute une répartition de particules, et notamment par les rapports de branchement des différents modes de désintégration : ce qui amène à une prédiction qui devrait pouvoir être vérifiée, à savoir qu'on doit pouvoir, en modifiant l'enveloppe spectrale par des phénomènes de résonance, modifier les rapports de branchement des différentes particules. En quelque sorte la mécanique classique disait "c'est certain", la

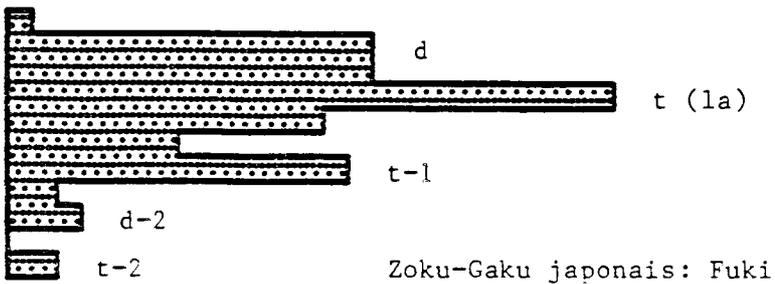
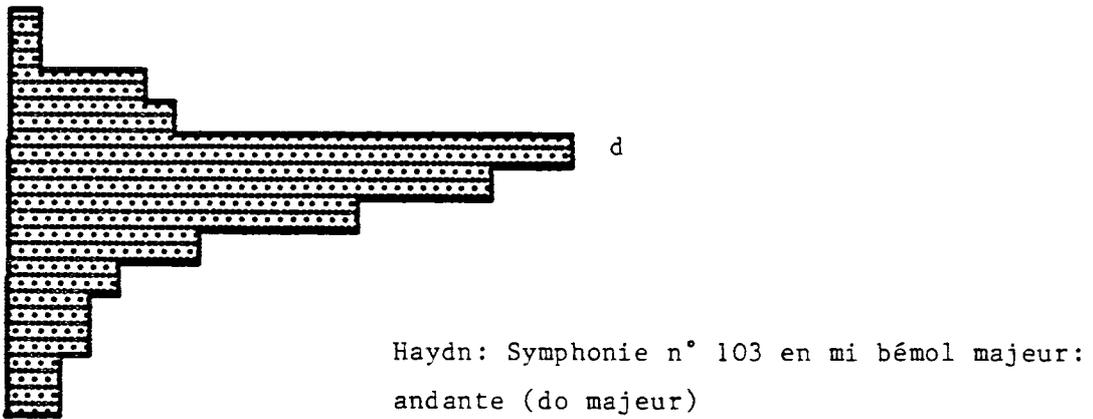
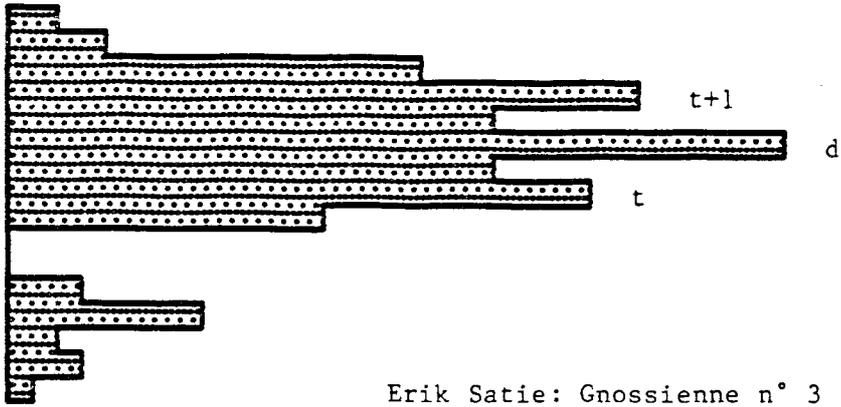


FIG. 15

Répartition des notes d'oeuvres de musique d'Occident et d'Orient  
(comptées par ligne de partition)

d = dominante, t = tonique, d-1 = d - 1 octave...

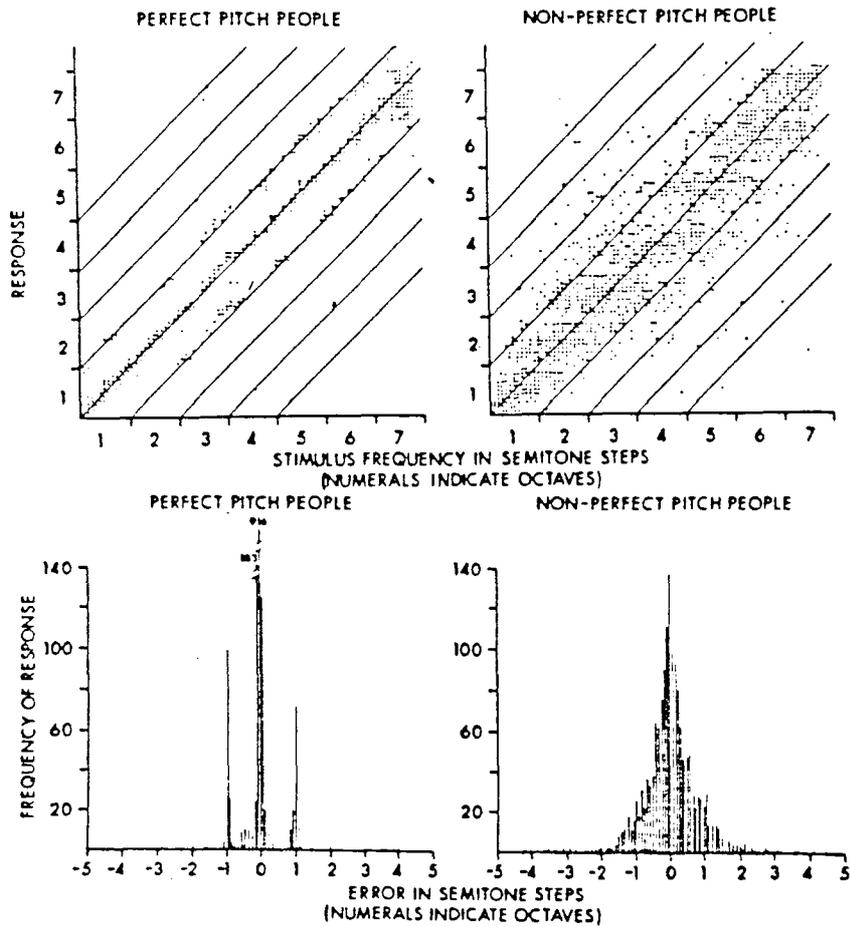


FIG. 16. The responses that were given (top) and the frequency of error magnitudes that occurred (bottom), for people with (left) and without (right) perfect pitch ability.

(figure extraite de (37))

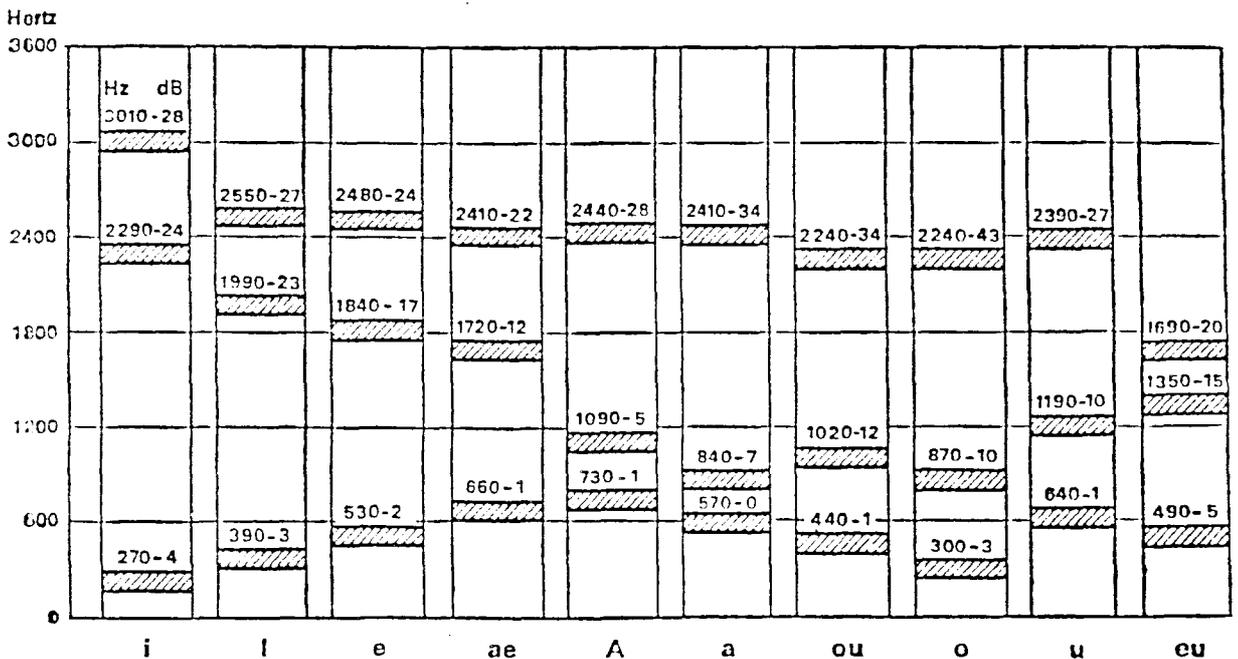
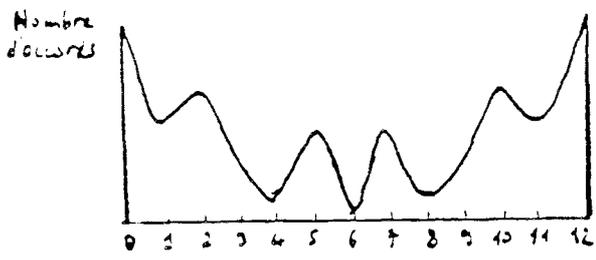


Fig. 17. — Sons à 3 formants (voyelles)

(figure extraite de (38))

# Musique des particules : intervalles et accords

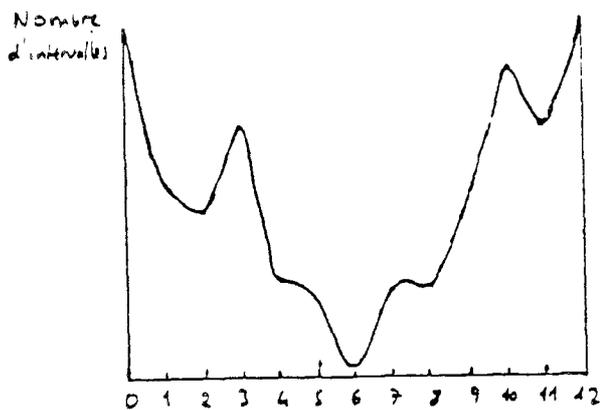
Comparaison avec la musique symphonique



↔ Accords (mod. 2) apparaissant dans les désintégrations des particules métastables

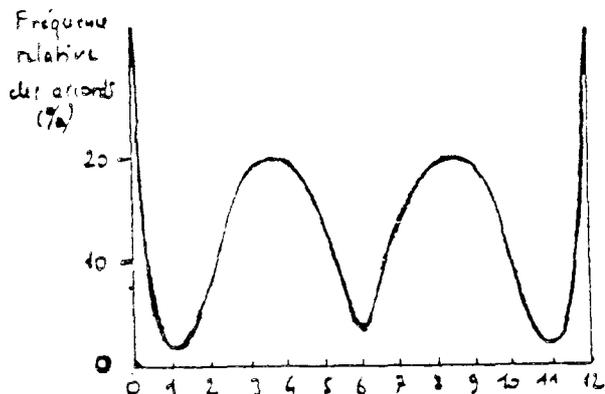


↔ Valeurs de n telles que  $2^{6n/72} \approx p/q$  (p et q ≤ 16)



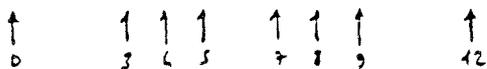
↔ Intervalles (mélodiques + harmoniques) mod. 2 dans les désintégrations de particules métastables

Valeurs de n (demi-ton)



Sonates de piano de Haydn, Mozart et Beethoven:

↔ accords les plus fréquents (mod. 2)<sup>(40)</sup>



↔ Valeurs de n telles que  $2^{n/12} \approx p/q$  (p et q ≤ 6)



↔ Valeurs de n telles que  $2^{(6n \pm 1)/72} \approx p/q$  (p et q ≤ 16)



↔ Base 2

mécanique quantique "c'est pas certain", et là on dit "c'est pas certain que ça ne soit pas certain"...ce qui réintroduit une forme de causalité.

(...)Alors, tout à l'heure je vous ai montré un certain nombre de lois empiriques ; ici (tableau II) je résume des lois qui sont déduites cette fois-ci de l'analyse théorique que vous venez de voir. Il y a aussi une loi des intervalles : les intervalles dans les désintégrations des particules suivent statistiquement une gamme à base 2, ça je vous l'avais fait entendre tout au début, et on le vérifie ; une loi des accords : les accords dans les désintégrations des particules suivent statistiquement une gamme pentatonique qui correspond à un mode chinois ; et l'enveloppe spectrale qui répond le mieux aux critères qu'on a exposés est une exponentielle négative excepté des pics situés aux octaves successifs de la fréquence fondamentale, ce qui correspond à celle du son "aum" chanté sur un la grave. Comme vous le voyez en effet (fig.17), parmi les "formants" des voyelles, ceux qui sont à peu près aux octaves successifs, c'est ici autour du ô, entre le o et le ou, quand on fait "aum" en fermant la bouche, c'est là qu'on se rapproche le plus de la structure harmonique d'une particule...Les autres formants sont voisins en moyenne d'harmoniques 1, 3, 5, ce qui donne d'ailleurs des indications sur la nature de l'équation d'ondes (propagées dans l'espace) qui doit entrer en jeu : c'est-à-dire qu'on doit modifier non-linéairement l'équation de Klein-Gordon en ajoutant un terme en  $\Psi^3$ , obtenant ainsi une équation qui donne lieu dans le cas isotrope à des solutions cnoïdales, qui ont bien des harmoniques impairs successifs ; et j'imagine qu'en faisant varier les conditions aux bornes on fait varier la position des formants : c'est en tout cas ce qui se passe dans le cas des voyelles, quand on articule on change les conditions aux bornes de l'équation différentielle et on modifie la position des formants. Une autre raison qui justifie cette équation est le résultat de Thomas Branson et Yvette Kosmann-Schwarzbach (39) qui ont montré qu'elle était la seule généralisation non-linéaire (sur les coordonnées d'espace-temps) de l'équation de Klein-Gordon qui soit covariante conforme.

Voici maintenant rapidement les intervalles (fig.18) : en haut les accords dans les désintégrations des particules métastables, qui correspondent aux valeurs de n telles que  $2^{6n/72} \simeq p/q$ , p et q  $\leq 16$ , c'est-à-dire celles qui approchent le mieux les fractions, on les voit légèrement pointer sur la figure ; en-dessous ce sont tous les intervalles, on reconnaît statistiquement une gamme à base 2, et là c'est en revanche assez différent de la musique symphonique, qui correspond au contraire aux valeurs de n telles que  $2^{n/12} \simeq p/q$  pour p et q  $\leq 6$ , c'est-à-dire approchant davan-

tage d'harmoniques premiers, mais moins exactement ; et où il n'y a (presque) pas la gamme de base 2 qui est en revanche beaucoup plus importante dans les musiques orientales, qui se rapprochent bien davantage du type de distribution ci-dessus (cf. Fig.15 ).

Il me reste, si vous le voulez bien, à vous en faire entendre quelques-unes.

"  $\Sigma^0$ , particule instable --  $\Omega^-$ , particule stable -- Composition".

Ca, c'est une composition un peu libre, qui donne une idée -- on l'a entendu plus précisément au début -- de la succession consonance, dissonance, résolution de la dissonance.

"Différents modes de désintégration de  $\Omega^-$  /  $\Omega^- \rightarrow \Xi \pi$ ,  $\Omega^- \rightarrow \Lambda K$ ,  $\Omega^- \rightarrow \Xi^* \pi$ ".

Là c'était une succession d'accords qui respectent à peu près les proportions des rapports de branchement de  $\Omega^-$  ; ce qui est assez curieux, d'ailleurs, c'est que le mode principal  $\Omega^- \rightarrow \Lambda K$  est un accord incomplet auquel il manque la tierce : elle est présente dans l'accord qui fait un la mineur ( $\Omega^- \rightarrow \Xi \pi$ ) ; et quand on a ces deux-là, alors on sent que pour la cadence musicale il faut un ré, eh bien il y a le mode  $\Omega^- \rightarrow \Xi^* \pi$  qui est beaucoup moins fréquent mais qui apporte le ré : c'est le morceau que vous venez d'entendre.

"Particule  $J/\psi$ ", "Mésons pseudoscalaires non-étranges".

Il y en a des quantités... Ici des mésons stables qui sont en majeur, tandis que les baryons plus haut étaient en mineur ; le  $J/\psi$  sonne effectivement assez "weird".

"Méson  $\eta$  charmé" ça c'est le  $\eta$  charmé à 2980 MeV, et qui viendrait se rajouter exactement sur la ligne principale (aligné avec le nucléon).

"  $\Lambda^0$  beauté suivi de  $\Omega^-$ " ça c'est une particule de beauté.

Il y a une dernière question que l'on peut peut-être se poser, c'est quelle évidence a-t-on (expérimentalement), puisque les particules suivent la gamme tempérée, qu'il s'agit bien de la fréquence de de Broglie proportionnelle à la masse de la particule, et non d'une fréquence qui serait inversement proportionnelle ? Eh bien on le voit sur la figure ici (fig.3), ne serait-ce que parce que le tas de gauche ici (ligne d) est plus haut que celui de droite (ligne f) ; la répartition est donc dissymétrique (par rapport à la ligne principale), c'est-à-dire que lorsque l'on compare aux p/q, il y en a davantage qui sont  $> 1$  (que  $< 1$ ), c'est-à-dire que les fréquences sont rapportées à des fréquences basses, et donc que ce sont bien des harmoniques (et non des sous-harmoniques). Il y a quand même des sous-harmoniques présents à cause de la non-linéarité ; mais on a là une évidence que c'est bien la relation de de Broglie qui est vérifiée. On peut le vérifier encore d'une autre façon : il y a en effet une relation inversement proportionnelle entre

la masse et la taille des particules pour la variation en fonction des nombres quantiques internes, qui sont ceux qui sont concernés ici ; pour le spin en revanche il nous faut prendre  $\lambda = -1$  (la formule "intuitée" par les iraniens), soit  $m = m_0 / (1 - \alpha n)$  : pour  $n = 1$ , (et  $\alpha =$  constante de Schwinger) en prenant pour  $m_0$  la masse du nucléon on obtient le 1065 MeV qu'avait constaté empiriquement Schwinger pour le spin  $(\frac{1}{2})^+$ , et pour le  $n = 2$  on obtient le  $\Delta = 1232$  MeV, ce qui correspond à l'observation empirique que l'écart entre le N et le  $\Delta$  vaut 2 fois l'écart moyen (147 MeV) du décuplet  $(\frac{3}{2})^+$ . Ainsi  $\lambda = -1$  convient au spin, et en fonction du spin la masse des particules augmente au contraire avec la taille. Ce qui confirme bien la solution principale = une fréquence propre proportionnelle à la masse des particules, mais qu'il y a aussi des sous-harmoniques donnent cette fois une inverse proportionnalité. Peut-être y a-t-il d'ailleurs un lien avec des modèles comme le string model qui considère une vibration avec une fréquence inversement proportionnelle à la masse : ça correspondrait alors à des sous-harmoniques, et bien entendu on peut se poser la question du lien entre les modèles composites corpusculaires et les sous-harmoniques qui sont prévus par la non-linéarité. Mais la base même, ce sont des vibrations de fréquence proportionnelle à la masse. Voilà, je vous remercie.

André Lichnerowicz : Y a-t-il des questions en marge ?

Jean Thierry-Mieg\* : Y a-t-il des interactions harmoniques et d'autres qui ne le sont pas ?

Joël Sternheimer : Le lien exact est avec la stabilité. Par exemple, sur les dernières tables le  $\Lambda_c$  a bougé de 20 MeV vers le haut, soit juste d'une ligne ; tandis que le B, qui est beaucoup plus stable (la limite expérimentale de  $10^{-12,5}$  sec. est entre les deux) se situe bien dans la zone de stabilité.

Jean-Daniel Allanche\* : Ça prouverait que dans ses manifestations la nature reste harmonique ? Ou que notre perception de la nature est harmonique ?

Joël Sternheimer : Pas seulement harmonique, en plus de l'aspect vibratoire qui équilibre l'aspect corpusculaire, il y a la notion d'invariance d'échelle, que les différents niveaux se valent pour décrire l'univers ; et un aspect temporel. (Un point de vue causal est non-séparable puisqu'alors rien n'est insignifiant ; mais alors, on ne peut plus isoler de causes et d'effets pour vérifier la causalité : celle-ci est donc limitée, ce qui permet d'isoler de nouveaux phénomènes et de repousser les limites ; il y a ainsi une évolution -- une expansion de l'univers, un développement en niveaux d'intégration successifs -- qui tend à rétablir une invariance d'échelle).

Richard Kerner<sup>\*</sup> : Dans les histogrammes, les fermions et les bosons sont mélangés ?

Joël Sternheimer : Oui, car dans la mesure où les bosons sont échangés par des fermions, il doivent tous être en accord.

Pierre Claverie<sup>#</sup> : Quel spectre de masse obtient-on avec l'algèbre de dimension infinie ?

Joël Sternheimer :  $m = m_0(1 + \lambda \alpha n)^{1/\lambda}$ .  $\lambda = 0$  donne le spectre exponentiel,  $\lambda = 1$  le linéaire, et dans le cas général on obtient des relations entre les masses en éliminant les paramètres  $m_0$  et  $\lambda$ , que l'on peut vérifier par exemple pour les 1<sup>ères</sup> récurrences de la série des  $\Upsilon$  (qui, au-delà des deux premières -  $\Upsilon'/\Upsilon = 2^{1/12}$  -- sont synchronisées sur un spectre qui n'est ni linéaire ni exponentiel).

Jean-Louis Cambefort<sup>■</sup> : Quelle est l'enveloppe temporelle des vibrations ?

Joël Sternheimer : Essentiellement une exponentielle négative (comme dans les désintégrations radioactives)

André Lichnerowicz : Puisqu'on peut modifier la forme de l'onde, on doit aussi pouvoir modifier cette enveloppe, et donc la durée de vie des particules ?

Joël Sternheimer : Oui, et c'est cela qui a des applications intéressantes : le contre-effet de la consonance sur la stabilité.

André Lichnerowicz : Il me reste à vous remercier pour cet exposé de physique extrêmement vivant et stimulant.

\* LPTHE, Orsay; + Université Paris VII; \* Université Paris VI; # Institut de Biologie Physico-chimique, Paris; ■ Université de Dijon.

Couverture: photo Lawrence Radiation Laboratory (Berkeley), représentant la matérialisation de deux paires électron-positron provenant de deux photons issus de la désintégration d'un pion neutre (p. 2, réaction (A)).

La figure 5 (haut) a été réalisée par Laurent Ach sur l'ordinateur MICRAL du Lycée Rodin; les figures 5 (bas), 7, 8, 10 ainsi que les calculs sur ordinateur ont été réalisés en collaboration avec Sylvain Baron sur IBM 30-81; les figures 14 et 15 ainsi que les tableaux ont été réalisés avec l'aide du micro-ordinateur LISA (Apple III) du C. P. E. (Ministère de l'Industrie et de la Recherche, Paris).

R E F E R E N C E S

- (1) V.E. Barnes et al., Phys. Rev. Lett. 12, 204 (1964)
- (2) Expérience NA 16, CERN (European Hybrid Spectrometer, HOLE BC, faisceau  $p^+$  de 360 GeV/c ; photo analysée au LPNHE, Univ. P.etM.Curie, Paris).
- (3) V.L. Ginzburg, O fizike i astrofizike (Key problems in physics and astrophysics), Nauka, Moscou (1974).
- (4) R.P. Feynman, La nature de la physique, Seuil, Paris (1980) (interview à la Revue Omni, 1979).
- (5) P. Hasenfratz and I. Montvay, Phys. Rev. Lett. 50, 309 (1983).
- (6) cf. J.Chailley, in Acoustique musicale, Coll. Int. CNRS 84, p.13 (1959).
- (7) A. Werckmeister, Musikalische Temperatur, Frankfurt am Main-Leipzig (1691).
- (8) E. Gerson-Kiwi, Supplément au dictionnaire de la Bible, p.1426 (Musique dans la Bible), éd. Pirot, Paris(1956).
- (9) L. de Broglie, C.R. Acad. Sc. Paris 177, 507 (1923).
- (10) H. Weyl, Raum Zeit Materie, Berlin (1918).
- (11) A. Einstein, lettre à M. Besso du 20/8/1918 (Hermann éd. 1979).
- (12) L. de Broglie, Thèse Paris (1924). (Masson éd. 1963).
- (13) Lord Rayleigh, Theory of sound, London (1894).
- (14) J. Haag, Ann. ENS 67 (3), 321 (1950).
- (15) J. Van Slooten, Electronic Application Bull. (Eindhoven), 12, 105 (1951).
- (16) N. Minorsky, Nonlinear oscillations, Van Nostrand (1962).
- (17) A. Blaquièrre, Nonlinear system analysis, Academic Press (1966).
- (18) "La standardisation naturelle des corpuscules de la microphysique ne peut être due qu'à une synchronisation" (A. Lamouche, cf.Revue Générale des Sciences 30 Mars 1923)
- (19) F. Baschet, New Scientist n°337, p.266 (1963).
- (20) cf. J.S. Bell, Physics (N.Y.) 1, 195 (1964).
- (21) E.C. Zeeman, J. Math. Phys. 5, 490 (1964).
- (22) M. Gell-Mann et Y. Ne'eman (eds), The Eightfold Way, Benjamin (N.Y.) 1964.
- (23) cf. F. Dyson, ed., Symmetry groups in nuclear and particle physics, Benjamin (N.Y.) 1966 ; cf. aussi discussion entre S.Coleman, M.Gell-Mann et le présent auteur, in "Strong and weak interactions---present problems", Int.school of physics "Ettore Majorana", ed. A.Zichichi, Acad.Press 1966.
- (24) M. Flato and D. Sternheimer, Phys. Rev. Lett. 16, 1185 (1966) ; Commun. Math Phys. 12, 296 (1969).
- (25) découverte en collaboration avec M. Flato.
- (26) cf. M. Barkechli "la musique iranienne" in Histoire de la Musique(Encyclopédie de la Pléiade) p.453, Gallimard, Paris 1960.
- (27) M. Flato et D. Sternheimer, C.R. Acad. Sc. Paris 263, 935 (1966).
- (28) J.W.S. Cassels, An introduction to Diophantine Approximations, Cambridge,U.P. (1965).
- (29) P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris (1937).
- (30) T. Takabayasi, Prog.Theor.Phys. 29, 474(1963) ; Buturi 68, 286 (1963).
- (31) R.M. Sternheimer, Phys. Rev. 136D, 1364 (1964).
- (32) J. Schwinger, Phys.Rev.Lett. 18, 797 (1967); Phys. Rev. 165, 1714 (1968).
- (33) Particle Data Group, Rev. Mod. Phys. 48, (1976);52, (1980) ; Phys.Lett. 75 B (1978) ; 111 B(1982).
- (34) L'idée d'introduire un terme en  $\partial_q$  dans l'équation d'ondes est due à M. Flato.
- (35) R. Hagedorn, Cargese Lectures in Physics, 6, 643 (1973).
- (36) W. Heisenberg, La partie et le tout, Albin Michel (1972).
- (37) G.R.Lockhead and R. Byrd, J. Acoust. Soc. Am. 70, 387 (1981).
- (38) J.J. Matras, Le Son, P.U.F. (1948)
- (39) T.P. Branson and Y. Kosmann-Schwarzbach, Lett. Math. Phys., 7, 63 (1983)
- (40) D'après A.J. Gabura, "Music style analysis by computer", in H.B. Lincoln, éd., The Computer and music, p.223, Cornell U.P. (1970).

## LOIS DU SPECTRE DE MASSE DES PARTICULES

---

1ère loi. Les masses des particules sont entre elles comme des notes de musique de la gamme chromatique tempérée.

$$m = m_0 \times 2^{n/12} \quad (n \text{ entier})$$

2ème loi. Toutes les notes de la gamme (c'est-à-dire toutes les valeurs de  $n$ ) ne sont pas représentées; mais les particules forment entre elles des accords dont la consonance est reliée à leur stabilité (gammes diatoniques).

$$2^{n/12} \simeq p/q, \quad p \text{ et } q = 2^a 3^b 5^c, \quad |b| \leq 3, \quad |c| \leq 1 \quad (n, p, q, a, b, c \text{ entiers})$$

3ème loi. A un niveau plus fin, les particules instables (résonances) étant incluses, subdivisent la gamme tempérée en une gamme de micro-intervalles divisant le demi-ton tempéré en six intervalles légèrement inégaux.

$$m = m_0 \times 2^{(n+\epsilon)/72} \quad (\epsilon = 0, \pm 1/4 \text{ ou } \pm 1/2)$$

Cette gamme effectue une synthèse des gammes musicales utilisées en orient et en occident.

### Loi de répartition globale

La répartition globale de l'ensemble des particules est conforme à la courbe d'équation

$$P(q) \sim e^{-6q^2/\text{Log}2} + (1/\sqrt{12})e^{-q^2/2\text{Log}2} \cos^2(\pi q/\text{Log}2)$$

multipliée par une fonction périodique de période  $\text{Log} 2/12$ , où  $q$  désigne l'échelle des logarithmes des masses.

Cette loi correspond également à la répartition globale des notes d'une symphonie (notamment de Mozart).

### Loi des intervalles

Les intervalles dans les désintégrations des particules suivent statistiquement une gamme à base 2.

### Loi des accords

Les accords dans les désintégrations des particules suivent statistiquement une gamme pentatonique

(telle que  $2^{6n+\varepsilon/72} = p/q$  avec  $\varepsilon < 1/2$  et  $p, q \leq 16$ ),

qui correspond au mode chinois chang ( $p/q=1, 9/8, 4/3, 3/2, 16/9, 2$ ).

### Enveloppe spectrale

L'enveloppe spectrale qui répond le mieux aux critères exposés ci-dessus est une exponentielle négative excepté des pics situés aux octaves successives de la fréquence fondamentale, qui correspond à celle du son "aum" chanté sur un la grave (ou entre la et do environ).

### Spectre de masse

$W$  = groupe d'invariance de l'ordre causal (groupe de Weyl)  
( $x < y$  si  $y$  est dans le cône de lumière de  $x$ )  
= groupe de Lorentz x translations x dilatations;

Représentation de l'algèbre de Lie: six  $M_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu$ , de 0 à 3) de Lorentz  
opérateur d'échelle  $iq$  (dilatations)  
et quatre  $P_\mu^\circ = P_\mu e^{-i\partial q}$  : translations  
( $\partial_q$  canoniquement conjugué de  $q$ ). On a  $[P_\mu^\circ, iq] = P_\mu^\circ$ .

Sur  $L^2(0, 2\pi/\alpha)$  (représentation locale)  
 $\Rightarrow$  spectre de masse exponentiel  $m = m_0 e^{\alpha n}$ .

---

Déformation:  $P_\mu^\lambda = P_\mu (1 - \lambda i \partial_q)^{1/\lambda}$ ,  $M_{\mu\nu}$  et  $iq$   
engendrent  $\mathcal{M}$  généralement de dimension infinie  
(comprenant tous les  $P_\mu^{(\lambda, n)} = P_\mu (1 - \lambda i \partial_q)^{(1/\lambda) - n - 1} \prod_{k \leq n} (1 - k\lambda)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ )  
mais pour  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{M} \rightarrow W$   
pour  $\lambda = 1$ ,  $\mathcal{M} \rightarrow$  contraction de  $su(2, 2)$

dans le cas général,  $\mathcal{M}$  = "unification spontanée" de ces deux algèbres  
donnant des spectres respectivement exponentiel et linéaire.

Analyse diophantienne

Soient

$\|p/q\|$  la différence, comptée positivement,  
entre  $N \log(p/q) / \log 2$  et l'entier le plus voisin;

$p_{r+2}$  le nombre premier de rang  $r+2$ ;

les valeurs, croissantes avec  $r$ , de  $N$

vérifiant pour tous les entiers  $p$  et  $q < p_{r+2}$

la relation  $\|p/q\| \leq (r/(r+\varepsilon_r)) N^{-1/r}$

— où  $\varepsilon_1=2, \varepsilon_r=1$  si  $r \neq 1$  —, avec  $r \leq \log N / \log \gamma + 1/2$  ( $\gamma = e^{\pi^2/12 \log 2} = 3,2758\dots$ )

sont  $N = 1, 12, 72$

(il n'y en a plus jusqu'à 400 000 si chaque  $N$  doit être multiple du précédent)

approchant respectivement  $r = 0, 2, 4$  harmoniques premiers  $> 2$  consécutifs,

soit  $p_{r+2}^{-1} = 2, 6, 12$  harmoniques entiers

et les fractions entières que l'on peut construire à partir d'eux;

d'où les gammes à bases  $2, 2^{1/12}, 2^{1/72}$ .

L'analyse en base  $3/2$

(en prenant  $\log(3/2)$  à la place de  $\log 2$  dans la définition de  $\|p/q\|$  )

donne  $(3/2)^{1/24}$ , d'où, comme  $3/2 \approx 2^{7/12}$ , la gamme  $2^{1/288}$ .

L'analyse en base 3 donne de même  $2^{1/1008}$ .

Tableau IV

Equation d'ondes invariante d'échelle

$$\text{L'équation } \square \Psi(q) = m^2 e^{2\alpha q} \Psi(q)$$

a, si on suppose que la dimension spatiale des particules  
d'une famille donnée ne dépend pas de l'échelle  
(c'est-à-dire  $\square \Psi = m^2 \Psi$ ), pour solution (comme  $e^{\alpha q} \Psi = (m_0/m) \Psi$ ):

$$\Psi(q_0 + n\alpha) = e^{\alpha n q} \Psi(q_0) = (m_0/m)^n \Psi(q_0) = e^{-\alpha n^2} \Psi(q_0)$$

si  $(q - q_0)/\alpha = n$  entier.

Si la probabilité totale ne dépend pas de N pour N petit, il vient avec  $P(q/\alpha) = |\Psi(q/2\alpha)|^2$ :

$$P(q) \sim e^{-6q^2/\text{Log}2} + (1/\sqrt{12}) e^{-q^2/2\text{Log}2} \cos^2(\pi q/\text{Log}2)$$

multiplié par une fonction périodique de q ( $\sim \text{Log}m$ ), de période  $\text{Log}2/12$ . En excellent accord

a) avec l'expérience

b) avec la répartition des notes d'une symphonie (notamment de Mozart);

mais c) en contraste avec SU(3),

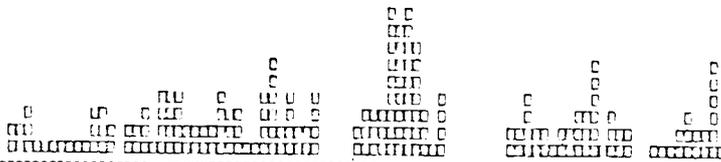
la thermodynamique des interactions fortes, et le bootstraps.

VARIANCE MINIMALE ENTRE 1 ET 1,15  
 PAR PAS DE  $10^{-4}$

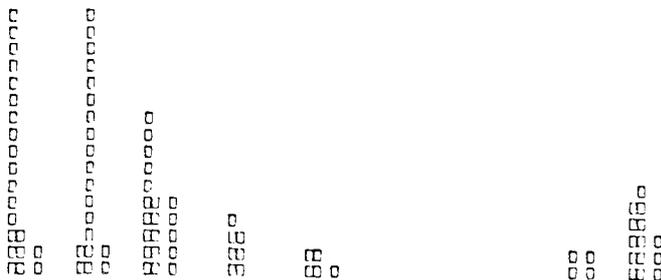
1,0595	VAR. 6,40	$(2^{1/12} = 1,05946)$
1,0697	VAR. 6,69	$(2^{7/72} = 1,06971)$
1,0696	VAR. 7,15	"
1,0800	VAR. 7,30	$(2^{8/72} = 1,08006)$
1,1010	VAR. 7,77	$(2^{10/72} = 1,10106)$
1,0971	VAR. 8,06	
1,0567	VAR. 8,08	
1,0950	VAR. 8,37	
1,0922	VAR. 8,43	
1,0949	VAR. 8,45	

Tableau VI

2 EXP 1122  
 PARTICLES



2 EXP 1122  
 P SUR Q



8<sup>ème</sup> tirage

1<sup>er</sup> tirage : 7 Mars 1984

Dépôt Légal : Mars 1984